

# İletken cisimlerin şekillerinin belirlenmesi için analitik devam dayalı yeni bir yöntem

Mehmet ÇAYÖREN\*, İbrahim AKDUMAN

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

## Özet

*Bu çalışmada yanına erişilemeyen mükemmel elektrik ileten cisimlerin şekillerinin elektromagnetik dalgalar kullanılarak uzaktan belirlenebilmesi için yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Ele alınan ters saçılma probleminde yanına erişilemeyen cisim elektromagnetik dalgalarla aydınlatılır ve cismin bu gelen dalgalarla etkileşimi sonucu ortaya çıkan saçılan dalga uzak alan bölgesinde ölçülür. Çalışmadaki esas amaç bu gürültülü ölçüm bilgisini kullanarak cismin şeklinin belirlenmesidir. Bu problem teorik açıdan baştan kararlı bir çözümün varlığının ve tekliğinin öngörülemeyeceği doğrusal olmayan kötü kurulmuş bir problemdir. Bu çalışmada sunulan yöntem ele alınan problemin kötü kurulmuş ve doğrusal olmayan kısımlarının ayrı ayrı ele alındığı bir analitik devam yöntemidir. Öncelikli olarak uzak alan verisi cismi çevreleyen minimum yarıçaplı bir daire üzerinde tanımlanan bir tek-katman potansiyel yoğunluğu yardımıyla ifade edilir. Ardından elde edilen integral denklem kesilmiş ayırık değer ayırıştırma yöntemi kullanılarak, regülerize edilmiş bir biçimde çözülüp, minimum daire üzerindeki bilinmeyen tek-katman potansiyel yoğunluğu belirlenir. Bu potansiyel yoğunluğu yardımıyla minimum daireden biraz daha geniş bir daire üzerinde hesaplanan saçılan alanın Taylor serisi açılımıyla, saçılan alan cismin yüzeyine kadar analitik olarak devam ettirilir. Cismin üzerinde toplam elektrik alanın sıfıra gitmesi biçiminde tanımlanan sınır koşulu yardımıyla, cismin şeklinin belirlenmesi problemi doğrusal olmayan bir denklemin köklerinin bulunmasına indirgenir. Bu polinom biçimindeki denklem Gauss-Newton algoritması kullanılarak yinelemeli bir biçimde çözülür. Sayısal sonuçlarla gösterilmiştir ki yöntem hem konveks hem de konkav tarafları olan yıldız-biçimli yüzeyler için başarılı sonuçlar vermektedir.*

**Anahtar Kelimeler:** Elektromagnetik ters saçılma problemleri, şekil belirleme, analitik devam yöntemleri.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Mehmet ÇAYÖREN mehmet@cayoren.com; Tel: (536) 676 07 05.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik Haberleşme Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Novel analytical continuation based shape reconstruction methods for perfect electric conducting targets" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 10.06.2009 tarihinde dergiye ulaştırılmış, 15.07.2009 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2010 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## A novel analytical continuation based shape reconstruction method for perfect electric conducting targets

### Extended abstract

*In this study, a new method for shape reconstruction of a perfect electric conducting target through the use of electromagnetic waves is presented. The aim in this inverse scattering problem is to retrieve the shape of an unknown target remotely, provided that the scattering wave which is the result of electromagnetic interaction between the target and the incident wave is known in the far field region. Theoretically the problem considered is a nonlinear ill-posed problem in which the existence and the uniqueness of a stable solution cannot be anticipated initially. The method presented in this study can be classified as an analytical continuation method in which the ill-posedness and the nonlinearity of the underlying problem are handled separately.*

*The shape reconstruction problem is studied in two-dimensional case. More precisely, the inaccessible target which is located in an infinite, lossless, non-magnetic and homogeneous space is assumed to be infinitely long and unchanging at one direction. The target is illuminated with a set of time harmonic plane waves of different incidence angles at a fixed frequency whose electric field is always parallel to the direction of the target. The scattered field which satisfies the Helmholtz equation together with appropriate boundary conditions is sampled on a full aperture in the far field region. Since ill-posed problems have a strong sensitivity to small perturbations on the input data, the scattered field is corrupted synthetically in order to model the inevitable measurement noise.*

*The initial step of the method is concerned with the reconstruction of the scattered field in the vicinity of the target from the noisy far field pattern. To this aim, the single layer potential representation is exploited such that the far field pattern is modeled as if it is generated by an unknown single layer potential density on a circle which is assumed to cover the inaccessible target with preferably minimum radius. The resulting Fredholm integral equation of first kind is severely ill-posed due to smoothing properties of its kernel. Thus the singular value decomposition is exploited to invert the integral equation in a regularized manner to determine the unknown single layer potential density. At this step, Morozov's dis-*

*crepancy principle is utilized to select a proper regularization parameter. Once the potential density is reconstructed, the scattered field can be approximated in the region outside of the minimum circle.*

*Later, to represent the scattered field inside the minimum circle, a Taylor series expansion of the reconstructed scattered field is exploited. In particular, instead of the scattered field on the minimum circle, the field on a larger circle is expanded into Taylor's series in the radial direction in order to avoid the singularity of the fundamental solution of the Helmholtz equation. Thus the scattered field is analytically continued to the boundary of the target. Together with the boundary condition that the total field on the unknown target must vanish, this series expansion enables to reduce the shape reconstruction problem into the solution of a nonlinear equation which contains the surface contour as unknown. The resulting nonlinear equation is in a polynomial form which includes the higher order derivatives of the reconstructed field as constant. When multiple illuminations are employed, since each far field pattern completely characterizes the unknown shape, a different solution can be reconstructed for each illumination. However as the shape of the inaccessible target is independent from the source configuration, a global solution which uses all the available data simultaneously is looked after. To this aim Gauss – Newton algorithm is exploited for the iterative solution of the nonlinear equations. In order to avoid possible instabilities that may arise due to the numerical errors in the derivatives of the nonlinear equations, a finite dimension solution in terms of a linear combination of predetermined basis functions is sought.*

*The presented method is numerically validated through several simulations and it is observed that the method provides satisfactory reconstruction for both convex and concave targets with star-like shapes. It is concluded that the size of target should be comparable to the operating wavelength when only a single illumination is used. However this limitation regarding to size of the obstacle can be improved with the usage of additional illuminations. Furthermore it is observed that the robustness against the noise on data increases with the usage of multiview data.*

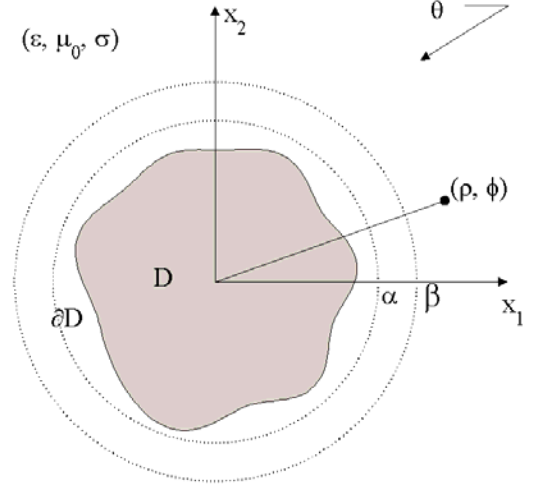
**Keywords:** *Electromagnetic inverse scattering problems, shape reconstruction, analytical continuation methods.*

## Giriş

Bu çalışmada yanına ulaşamayan mükemmel elektrik iletken cisimlerinin şekillerinin elektromagnetik dalgalar kullanılarak uzaktan belirlenmesi için yeni bir yöntem önerilmiştir. Ele alınan konu ters saçılma teorisindeki temel problemlerden biridir ve teorik açıdan doğrusal olmayan, kötü kurulmuş bir problemdir. Bu nedenle baştan kararlı bir çözümün varlığı ve tekliği öngörülemez. Şekil bulma probleminin çözümü için önerilen yöntemler optimizasyon tabanlı olanlar ve örnekleme tabanlı olanlar olarak sınıflandırılabilirler. Optimizasyon temelli yöntemlerde erişilemeyen cismin üzerindeki sınır koşulunun bilindiği varsayılır ve bu sınır koşulu yardımıyla şekil bulma problemi bir optimizasyon problemi olarak değerlendirilir. Literatürde bu problemin çözümü için önerilen ilk çalışmalardan biri Imbriale ve Mittra (1970) tarafından sunulmuştur. Optimizasyon tabanlı diğer çalışmalardan Roger (1981) Newton-Kantorovitch algoritması, Bojarski (1982) ve Pierri ve diğerleri (2001) fiziksel optik teorisi, Lin ve diğerleri (1996) eşdeğer kaynak yöntemi, Qing ve diğerleri (2001) ve Rekanos (2008) metaheuristik optimizasyon tabanlı yaklaşımlar ve Kress (2003) ise analitik devam temelli bir yöntem sunulmuştur. Örnekleme tabanlı yaklaşımlarda cismin üzerinde sınır koşulunun bilinmesi gerekmez ve konuma bağlı belli bir gösterge fonksiyonun değeri cismin arandığı bölgede örneklenecek cismin şekli ortaya çıkarılmaya çalışır. Bu türdeki yöntemlerden özellikle doğrusal örnekleme yöntemi üzerinde önemli çalışmalar yapılmıştır (Colton ve Kirsch, 1996; Colton vd., 1997). Diğer örnekleme yöntemleri arasında faktörizasyon yöntemi ve tekil-kaynak yöntemleri sayılabilir (Kirsch, 2004; Potthast, 2006). Örnekleme yöntemlerinin üstünlüğü teorik olarak sınır koşullarından bağımsız olmalarıdır ancak elde edilen şekiller optimizasyon tabanlı yöntemlerdeki kadar belirgin değildir ve çok daha fazla ölçüm verisi gerektirmektedir. Tüm bu yöntemler literatüre önemli katkılar sağlamıştır ancak bu türdeki problemlerin çözümlerinin mühendislikte bulacağı uygulamaların çeşitliliği nedeniyle daha etkin yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır.

## Ters saçılma problemi

Kesiti Şekil 1'de gösterilmekte olan elektromagnetik saçılma problemini ele alalım.



Şekil 1. Problemin geometrisi

Burada mükemmel elektrik iletken  $D$  cismi, bünye parametreleri  $(\epsilon, \mu_0, \sigma)$  ile verilen sonsuz geniş homojen bir uzayda yer almakta olup,  $Ox_3$  eksenine doğrultusunda sonsuz uzun olduğu ve yine bu ekseninde herhangi bir değişim göstermediği varsayılmaktadır. Cismin sınırı olan  $\partial D$  üzerinde alınan herhangi bir  $\mathbf{x}$  noktası parametrik olarak  $(f(\phi), \phi)$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  biçiminde tek değerli bir  $f(\phi)$  fonksiyonuyla gösterilebiliyor olsun.  $D$  cismi sabit bir frekansta farklı geliş açılara sahip ve elektrik alan vektörü daima  $Ox_3$  doğrultusunda olan düzlemsel elektromagnetik dalgalarla aydınlatılsın. Zamana bağımlılığın  $e^{-i\omega t}$  kabul edilmesi durumunda,  $\theta_n$  geliş açısıyla ilişkili elektrik alan vektörü

$$\mathbf{E}_n^i = (0, 0, u_n^i(\rho, \phi)) \quad (1)$$

biçiminde olacaktır ve gelen dalga

$$u_n^i(\rho, \phi) = e^{-ik\rho\cos(\phi-\theta_n)} \quad (2)$$

olarak verilir. Burada ortamın dalga sayısı  $k^2 = \omega^2\epsilon\mu + i\omega\sigma\mu_0$  biçiminde verilen ifadenin kareköküdür.  $Ox_3$  eksenine doğrultusunda herhan-

gi bir değişim olmaması nedeniyle toplam ve saçılan elektrik alan vektörlerinin yalnızca  $x_3$  doğrultusunda bileşenleri olacağından ele alınana vektörel problem skaler duruma indirgenmiştir.  $u_n(\mathbf{x})$  toplam elektrik alanı göstermek üzere, saçılan alan  $u_n^s(\mathbf{x})$  aşağıdaki fark biçiminde tanımlanır

$$u_n^s(\mathbf{x}) = u_n(\mathbf{x}) - u_n^i(\mathbf{x}) \quad (3)$$

Saçılan alan Helmholtz denklemini

$$\Delta u_n^s(\mathbf{x}) + k^2 u_n^s(\mathbf{x}) = 0 \quad (4)$$

ve cismin yüzeyi üzerinde aşağıda verilen sınır koşuluyla

$$u_n^s(\mathbf{x}) + u_n^i(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial D \quad (5)$$

birlikte Sommelfeld radyasyon koşulunu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u_n^s}{\partial r} - i k u_n^s \right) = 0, \quad r = |\mathbf{x}| \quad (6)$$

sağlar. Öte yandan saçılan alan tüm doğrultular da aşağıda verilen asimptotik ifadeye sahiptir

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u_n^s(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{\sqrt{|\mathbf{x}|}} \left\{ u_n^\infty(\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \right\}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}. \quad (7)$$

Burada  $u_n^\infty(\hat{\mathbf{x}})$  saçılan alanın uzak alanı olarak adlandırılır. Tüm bu açıklamalar göz önüne alındığında, ele alınan ters saçılma problemi  $u_n^\infty$ 'nin bilinmesi durumunda  $\partial D$ 'nin bulunması olarak tanımlanır.

### Saçılan alanın özel bir gösterimi

Önerilen yöntemin ilk aşamasında amaç cismin etrafındaki bölgede saçılan alanın belirlenmesidir. Bu amaçla cismin içerisinde kaldığı varsayılan ve tercihen minimum yarıçaplı  $\rho = \alpha$  daire-sini göz önüne alalım.  $\rho > \alpha$  bölgesinde cisimden saçılan alan aşağıda verildiği gibi

$$u_n^s(\rho, \phi) = \frac{i\alpha^{2\pi}}{4} \int_0^{2\pi} H_0^{(1)} \left( k \sqrt{\rho^2 + \alpha^2 - 2\rho\alpha \cos(\phi - \tau)} \right) \Psi_n(\tau) d\tau \quad (8)$$

minimum daire üzerinde tanımlanmış bilinmeyen bir  $\Psi$  tek-katman potansiyel yoğunluğuyla ifade edilebilir (Colton ve Kress, 1998). Burada  $H_0^{(1)}$  birinci türden Hankel fonksiyonunu göstermektedir. Ele alınan ters saçılma probleminde saçılan alanın uzak alan bölgesindeki asimptotik ifadesi bilindiğinden Hankel fonksiyonunun asimptotik ifadesi de kullanılarak (8) eşitliği aşağıdaki gibi kısa biçimde ifade edilebilir (Abramowitz ve Stegun, 1964; Colton ve Kress, 1998).

$$S\Psi_n = u_n^\infty \quad (9)$$

Burada  $S$  operatörünün açık hali

$$(S\Psi)(\phi) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_0^{2\pi} e^{-ik \cos(\phi - \tau)} \Psi(\tau) \alpha d\tau \quad (10)$$

biçiminde tanımlıdır. Eşitlik (10)'da verilen birinci türdeki Fredholm integral denklemi doğrusal kompakt operatörü nedeniyle kötü kurulmuştur. Bu nedenle Eşitlik (9)'da verilen operatör denklemin çözümünde regülarizasyon kullanılması gerekmektedir ve yalnızca aranılan tek-katman potansiyel yoğunluğu  $\Psi$  yaklaşık olarak belirlenebilir. Eşitlik (9)'un çözümü için kullanılacak yöntemlerden bir tanesi ayrık değer ayrıştırma yöntemidir. Doğrusal kompakt  $S$  operatörü için ayrık değer ayrıştırma metodu  $\{\sigma_r, \varphi_r, \nu_r\}$  üçlüsüyle aşağıdaki gibi

$$S\Psi = \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_r \langle \Psi, \varphi_r \rangle \nu_r \quad (11)$$

tanımlanır. Burada  $\langle, \rangle$  uygun uzaydaki iç çarpımı göstermektedir. Eşitlik (11)'nin önemli bir sonucu bilinmeyen  $\Psi$  fonksiyonunun aşağıdaki verildiği gibi

$$\Psi = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_r} \langle u_n^\infty, \nu_r \rangle \varphi_r \quad (12)$$

bulunabilmesidir. Eşitlik (9)'da verilen operatör denkleminin çekirdeğinin özelliği olarak tekil değerler çok hızlı bir biçimde sifira gidecektir.

Sonuç olarak  $u^\infty$  verisinde belirsizlikler olması durumunda yüksek dereceli tekil değerler tümüyle gürültü tarafından bozulacağından tekil değerlerin bu davranışı kararsız çözümlere neden olacaktır. Bu sorunun üstesinden gelmek amacıyla kullanılabilir bir yöntem aşağıda tanımlandığı gibi yüksek dereceli tekil değerlerin atılmasıdır.

$$\Psi^{(R)} = \sum_{\sigma_r \geq \sigma_R} \frac{1}{\sigma_r} \langle u^\infty, v_r \rangle \varphi_r \quad (13)$$

Burada  $R$  sayısı regülarizasyon parametresi olarak adlandırılır. Regülarizasyon parametresinin seçimi elde edilecek sonuçlar üzerinde çok etkilidir çünkü yapılan yaklaşıklık hassasiyeti  $R$  sayısının olabildiğince büyük olmasını diğer taraftan gürültünün etkilerinin azaltılarak çözümün kararlılığının sağlanması anlamındaysa  $R$  sayısının olabildiğince küçük seçilmesi gereklidir. Eğer uzak alan verisindeki gürültü gücüne ilişkin bir tahmin mevcutsa Morozov'un tutarsızlık prensibi  $R$  parametresinin seçimi için elverişli bir kriter sağlar (Morozov, 1984).

$$\|S\Psi^{(R)} - u^\infty\|^2 \leq \delta, \quad (14)$$

Burada  $\delta$  beklenen gürültü gücüdür. Sonuç olarak (9) eşitliği kesilmiş ayırık değer ayırıştırma yöntemi uygulanarak çözülebilir ancak her durumda çözülen  $\Psi^{(R)}$  (9) eşitliğinin çekirdeğinin "yumuşatma" özelliği nedeniyle gerçek  $\Psi$ 'nin alçak geçiren filtrelenmiş hali olacaktır (Çayören vd., 2007).

Yöntemin ikinci aşamasında  $\rho < \alpha$  bölgesinde saçılan alanı ifade etmek için saçılan alanın Taylor serisi açılımı kullanılacaktır. Bu amaçla  $\rho = \beta > \alpha$  yarıçaplı ikinci bir daire seçilir. Bu durumda toplam alanın ifadesi aşağıdaki şekilde verilir.

$$u(\rho, \phi) = e^{-ik\rho \cos(\phi-\theta)} + \sum_{m=0}^M c_m (\rho - \beta)^m + R_M(\rho, \phi), \quad \rho \in (f(\phi), \beta] \quad (15)$$

Burada katsayılar

$$c_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m u^s(\beta, \phi)}{\partial \rho^m} \quad (16)$$

ve kalan terim

$$R_M(\rho, \phi) = \frac{1}{M!} \int_{\beta}^{\rho} (\rho - \rho')^M \frac{\partial^{M+1} u^s(\rho', \phi)}{\partial \rho'^{M+1}} d\rho'. \quad (17)$$

biçiminde tanımlıdır.  $c_m$  katsayılarının sağ taraftaki türevler (8) aracılığıyla aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\frac{\partial^m u^s(\beta, \phi)}{\partial \rho^m} = \frac{i\alpha}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^m}{\partial \rho^m} \left[ H_0^{(1)}(k\sqrt{\rho^2 + \alpha^2 - 2\rho\alpha \cos(\phi - \tau)}) \right]_{\rho=\beta} \Psi(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Toplam alan  $u(\rho, \phi)$   $\rho'$  nun regüler bir fonksiyonu olmasına karşın kalan terim  $R_M$ 'nin her durumda sıfıra gideceği söylenemez. Dolayısıyla buradaki Taylor serisinin açılımının her zaman yüzeye yakınsaması beklenmemektedir ancak  $R_M$  terimi ihmal edilerek (15)'teki gösterim ters problemin çözümünde bir yaklaşıklık olarak kullanılacaktır. Üzerinde durulması gereken bir diğer konu  $c_m$  katsayılarındaki türevlerin  $\rho = \alpha$  üzerinde de alınabilmesidir ancak böylesi bir durumda Hankel fonksiyonunun tekilliği nedeniyle özellikle üst mertebeden türevlerin alınmasında büyük zorluklarla karşılaşılacaktır, bu amaçla türevler  $\rho = \beta > \alpha$  üzerinde alınarak türevlerin hesabı kolaylaştırılmıştır.

### Şekil bulma algoritması

Yukarıda verilen (9) - (18) ifadeleri kullanılarak gürültülü uzak alan verisi  $u^\infty$  cisim sınırına kadar devam ettirmek mümkündür. Eşitlik (5)'de verilen sınır koşulu uyarınca, cismin yüzeyinde toplam alanın sıfıra gitmesi gerektiğinden, toplam alanın Eşitlik (15)'teki gösteriminden kalan terimi  $R_M$  ihmal edilerek aşağıda verilen doğrusal olmayan denklem elde edilir:

$$F_n(f) = e^{-ikf \cos(\phi - \theta_n)} + \sum_{m=0}^M c_m^{(n)} (f - \beta)^m = 0. \quad (19)$$

Bu serinin yakınsama hızı  $|f - \beta|/\lambda$ 'nin küçük olmasıyla ilişkili olacaktır, dolayısıyla bu koşulun sağlanması varsayımında serinin derecesi M küçük seçilebilir. Eldeki toplam N tane farklı geliş açısıyla ilişkili olarak aşağıdaki verilen

$$\begin{aligned} F_1(f) &= 0 \\ &\vdots \\ F_N(f) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

doğrusal olmayan denklem sistemi elde edilir. Cismin şekli kaynak yapılandırılmasından bağımsız olduğundan yukarıda verilen toplam N adet denklemde aynı sonucu vermesi gerekmektedir. Bu nedenle denklemlerin ayrı ayrı çözülmesi yerine, denklemlerin birlikte en küçük kareler anlamında çözülmesi yoluna gidilmiştir (Çayören, 2008). Bu amaçla Eşitlik (20)'de verilen doğrusal olmayan denklemler Gauss – Newton algoritmasıyla yinelemeli olarak çözülür (Zak, 2001). İlk aşamada (20)'deki denklemler Newton yöntemi anlamında aşağıdaki gibi doğrusallaştırılırlar.

$$\begin{pmatrix} F_1'(f_i) \\ \vdots \\ F_N'(f_i) \end{pmatrix} \Delta f_{i+1} = - \begin{pmatrix} F_1(f_i) \\ \vdots \\ F_N(f_i) \end{pmatrix} \quad (21)$$

Burada  $F_n'$   $F_n$  operatörünün  $f$ 'e göre Frechet türevini temsil etmekte olup (19) ifadesi polinom biçiminde olduğundan sıradan türeve indirgenir. Eşitlik (21)'deki  $\Delta f_{i+1}$  ifadesi  $f_{i+1} = f_i + \Delta f_{i+1}$  uyarınca i. adımda kestirilen şeklin ne kadar güncelleneceğinin ölçüsüdür. Bu aşamada  $F_n'$  türevinin sıfıra yaklaşması durumunda ortaya çıkabilecek kararsızlıkları ortadan kaldırmak amacıyla  $\Delta f$ 'in sonlu boyutlu bir yaklaşıklık aranmaktadır. Özel halde  $\Delta f$  önceden belirlenmiş baz fonksiyonları  $\mathcal{G}_p(\phi)$ 'lerin bir doğrusal bir birleşimi olarak aşağıdaki gibi

$$\Delta f(\phi) = \sum_{p=1}^P c_p \mathcal{G}_p(\phi). \quad (22)$$

aranacaktır. Sonuç olarak Eşitlik (21), Eşitlik (22)'de yerine konulup  $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(Q)}$  noktalarında ayrıklaştırıldığında aşağıda verilen doğrusal denklem sistemi elde edilir:

$$\mathbf{J}_F(f_i) \mathbf{C}_{i+1} = -\mathbf{V}(f_i) \quad (23)$$

Bu doğrusal denklem sistemi aşağıda verildiği biçimiyle yinelemeli olarak çözülür.

$$\mathbf{C}_{i+1} = -[\mathbf{J}_F^*(f_i) \mathbf{J}_F(f_i)]^{-1} \mathbf{J}_F^*(f_i) \mathbf{V}(f_i). \quad (24)$$

Burada sütun vektörü  $\mathbf{C}_{i+1}$  Eşitlik (22)'de tanımlı P adet bilinmeyen  $c_p$  katsayılarını içerir.  $(N \times Q) \times P$  boyutlu  $\mathbf{J}_F$  matrisi  $F$ 'in baz fonksiyonları üzerine izdüşümlerinden ve  $(N \times Q) \times 1$  boyutlu sütun vektörü  $\mathbf{V}$ ,  $F$ 'in ayrıklaştırma noktalarındaki değerlerinden oluşmakta ve  $\mathbf{J}_F^*$  ve  $\mathbf{J}_F$ 'nin adjointini göstermektedir. Önceden belirlenmiş bir eşik değeri  $\epsilon$  için yineleme işlemi  $\|\mathbf{C}_{i+1} - \mathbf{C}_i\| < \epsilon$  sağlanana kadar devam ettirilerek  $c_p$  katsayıları ve dolayısıyla da  $f(\phi)$  yüzeyi bulunur.

### Sayısal sonuçlar

Bu bölümde hem tanıtılan yöntemin sayısal doğrulaması gerçekleştirmek hem de yöntemin çalışma sınırları belirlemek amacıyla çeşitli örnekler sunulacaktır. Ele alınan tüm örneklerde cismin boş uzayda olduğu varsayılmış ve saçılan alan verisi ilgili düz saçılma problemini tekve çift-katman potansiyellerinin karma bir gösterimi aracılığıyla çözümünden elde edilmiştir (Colton ve Kress, 1992). Saçılan alan verisi uzak alan bölgesinde eşit aralıklı toplam  $T = 60$  noktada örneklenmiştir. Yöntemin kararlılığını sınamak amacıyla tüm örneklerde uzak alan verisine aşağıdaki biçimiyle rasgele gürültü eklenmiştir.

$$\tilde{u}^\infty(\hat{x}) = u^\infty(\hat{x}) + \xi |u^\infty(\hat{x})| e^{i2\pi r_u}, \quad (25)$$

Burada  $\xi > 0$  gürültü oranı olup,  $r_u$  ise  $[0,1)$  aralığında düzgün dağılımlı bir rasgele değiş-

kendir ve işaret gürültü oranı  $SNR = -20 \log(\xi)$  biçimindedir.

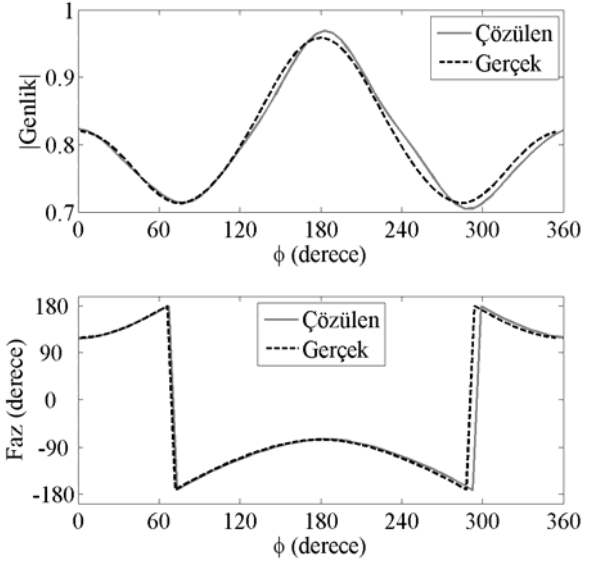
İlk örnek olarak yüzeyi aşağıdaki verilen parametrik değişime sahip olan

$$\begin{aligned} x_1 / \lambda &= 0.2(\cos \phi + 0.2 \cos 3\phi) \\ x_2 / \lambda &= 0.2(\sin \phi + 0.2 \cos 3\phi) \end{aligned} \quad (26)$$

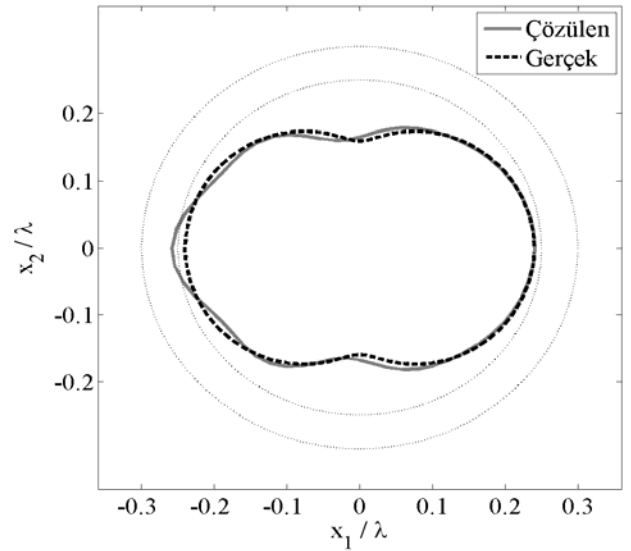
bir cisim göz önünü alınmıştır. Bu cisim  $\theta = 0$  geliş açısına sahip bir düzlem dalgayla  $f = 300$  MHz'de aydınlatılıp saçılan alana  $\xi = 0.01$  ( $SNR = 40dB$ ) oranıyla rasgele gürültü eklenmiştir. Bu örnekte cismi çevreleyen minimum dairenin tam olarak  $\alpha = 0.25\lambda$  bilindiği varsayılmaktadır. İlk aşamada gürültülü uzak alan verisinden  $\alpha = 0.25\lambda$  yarıçaplı minimum daire üzerinde bir tek-katman potansiyeli bulunmuştur. Bu aşamada tersi alınan (9) operatör denklemini kötü kurulmuş olduğundan regülasyon parametresi Morozov'un tutarsızlık prensibi uyarınca  $R = 9$  olarak seçilmiştir. Daha sonra bulunan bu tek-katman potansiyeli aracılığıyla Eşitlik (8) kullanılarak  $\beta = 0.3\lambda$  yarıçaplı daire üzerindeki saçılan alan hesaplanmıştır. Elde edilecek çözümün doğruluğunun hesaplanan saçılan alanın doğruluyla ilişkili olduğu kesindir, bu nedenle  $\beta = 0.3\lambda$  dairesi üzerinde hesaplanan saçılan alanla, gerçek saçılan alanın karşılaştırılmıştır. Şekil 2'de gerçek saçılan alanla çözülen saçılan alanın genlik ve fazlarının karşılaştırılması görülmektedir.

Görüldüğü gibi elde edilen saçılan alan genliğinde bir miktar bozulma olmasına karşın gerçek saçılan alana oldukça yakındır. Daha sonra (15) eşitliği  $M = 3$ 'de kesilip, Eşitlik (22)'de  $P = 9$  seçilerek,  $f_0 = \alpha$  ilk değeri için şekil bulma yöntemi uygulanmıştır. Elde edilen sonuç Şekil 3'te görülmektedir.

Şekilden de görüldüğü gibi bulunan şekil cismin gerçek şekline oldukça yakındır. Öte yandan çözülen şeklin aydınlatılan kısmının aydınlatılmayan tarafa göre çok daha doğru biçimde bulunduğu da gözlemlenmektedir. Hem yöntemin daha karmaşık bir şekil için davranışını hem de



Şekil 2. Çözülen saçılan alanla gerçek saçılan alanın  $\rho = 0.3\lambda$ 'da karşılaştırılması



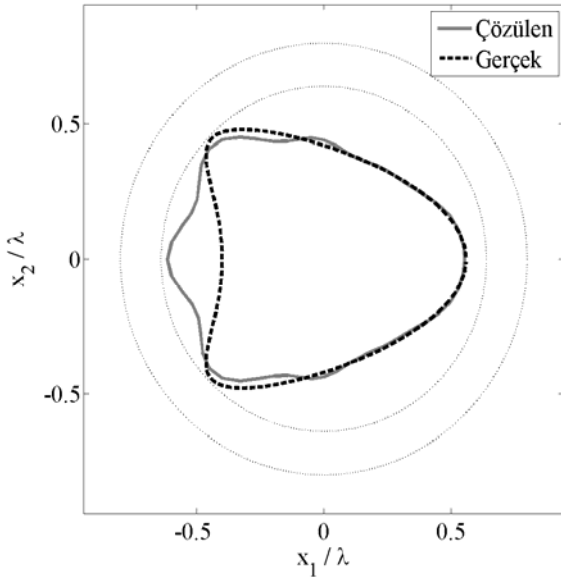
Şekil 3. Cismin gerçek şekli ve bulunan şeklinin karşılaştırılması

çoklu aydınlatma durumundaki başarımını ortaya çıkarmak amacıyla ikinci olarak aşağıdaki parametrik denklemlerle verilen

$$\begin{aligned} x_1 / \lambda &= 0.48 \cos \phi + 0.20 \cos 2\phi - 0.12 \\ x_2 / \lambda &= 0.48 \sin \phi \end{aligned} \quad (27)$$

ve belirgin konveks ve konkav tarafları olan cisimi ele alalım. Bu cisim  $\theta_1 = 0$  ve  $\theta_2 = \pi$  geliş

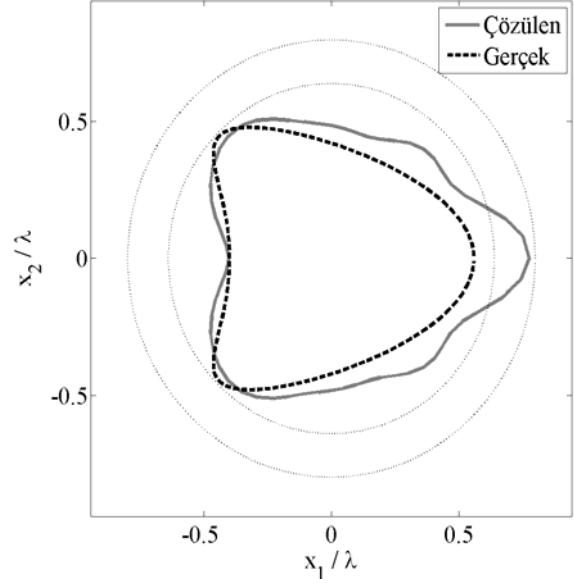
açıları için  $f = 600\text{MHz}$ 'de aydınlatılma olup, çözülen uzak alan verisine  $\xi = 0.01$  ( $SNR = 40\text{dB}$ ) oranıyla gürültü eklenmiştir. Bu örnekte yine cisimi çevreleyen minimum dairenin  $\alpha = 0.64\lambda$  olarak bilindiği varsayılmış ve diğer simülasyon parametreleri  $R = 9$ ,  $\beta = 0.8\lambda$ ,  $f_0 = \alpha$ ,  $M = 4$  ve  $P = 9$  seçilmiştir. Şekil 4 ve Şekil 5'te sırasıyla geliş açısı  $\theta_1 = 0$  ve  $\theta_2 = \pi$  iken bulunmuş şekillerin cismin gerçek şekliyle karşılaştırılmaları gösterilmektedir.



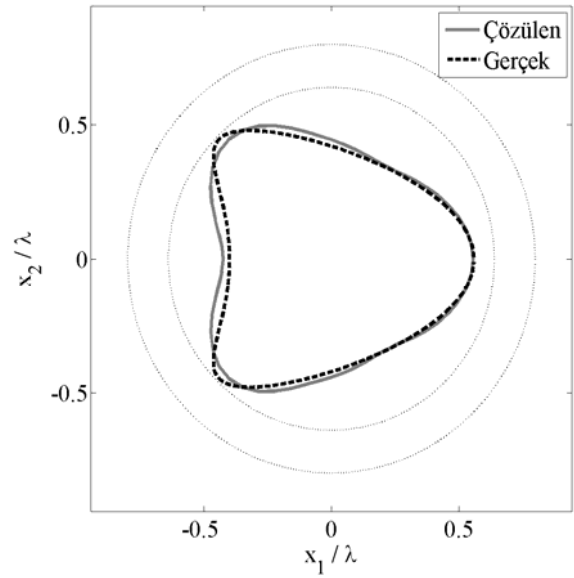
Şekil 4.  $\theta_1 = 0$  geliş açısı için bulunan şeklin gerçek şekille karşılaştırılması

Bu şekillerden de gözüktüğü gibi önerilen yöntem aydınlatılan tarafta oldukça başarılı sonuçlar sağlamaktayken elde edilen şeklin doğruluğu aydınlatılmamış tarafta bozulmaktadır. Bu gözlemden yola çıkarak  $\theta_1 = 0$  ve  $\theta_1 = \pi$  aydınlatmaları için elde edilen gürültülü saçılan alan verilerinin birlikte kullandığı üçüncü bir simülasyon gerçekleştirilmiştir ve sonuç Şekil 6'da gösterilmektedir. Görüldüğü gibi bulunan şekil oldukça başarılıdır.

İlk iki örnekte cisimi çevreleyen minimum daireye ilişkin doğru tahminlerimizin olduğu kabul edilmişti, ancak minimum dairenin hatalı seçilmesi durumunda yöntemin davranışını ortaya çıkarmak amacıyla aşağıdaki parametrik denklemle tanımlanmış cisimi göz önüne alalım.



Şekil 5.  $\theta_2 = \pi$  geliş açısı için bulunan şeklin gerçek şekille karşılaştırılması



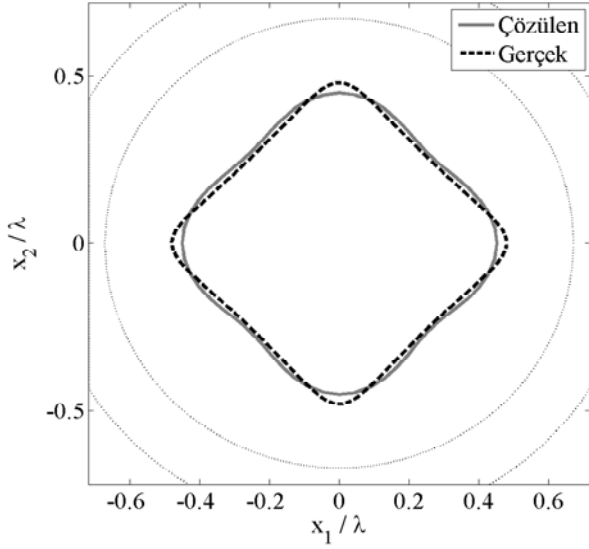
Şekil 6.  $\theta_1 = 0$  ve  $\theta_2 = \pi$  geliş açıları için çözülen şeklin gerçek şekille karşılaştırılması

$$\begin{aligned} x_1 / \lambda &= 0.24(\cos^3 \phi + \cos \phi) \\ x_2 / \lambda &= 0.24(\sin^3 \phi + \sin \phi) \end{aligned} \quad (28)$$

Cisim  $f = 1200\text{MHz}$ 'de eşit aralıklı  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_3 = \pi$  ve  $\theta_4 = \frac{3\pi}{2}$  geliş açıları için aydınlatılmıştır. Gürültü oranı  $\xi = 0.0316$  ( $SNR = 30\text{dB}$ )'dir. Bu örnekte mi-



nimum dairenin hatalı biçimde %40 daha geniş seçildiği ve  $\alpha = 0.672\lambda$  olduğu varsayılmıştır. Diğer simülasyon parametreleri  $R = 11$ ,  $\beta = 0.84\lambda$ ,  $f_0 = \alpha$ ,  $M = 5$  ve  $P = 5$  olarak seçilmiştir ve elde edilen sonuç Şekil 7’de gösterilmektedir.



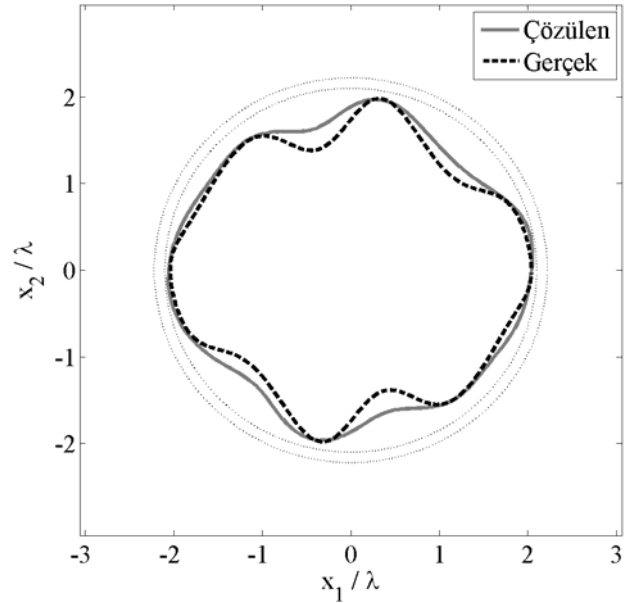
Şekil 7. Cismi çevreleyen minimum dairenin hatalı seçilmesi durumunda bulunan şekille gerçek şeklin karşılaştırılması

Sonuçtan da anlaşıldığı gibi yöntem minimum dairenin yeterince hassas kestirilemediği durumlarda da çalışmaktadır ancak hatalı sonuçlardan kaçınmak amacıyla farklı birkaç minimum daire seçimi için çözümün tekrarlanması uygun olacaktır. Bu noktada belirtilmesi gereken bir diğer konuya bu çalışma da gösterilen tüm örneklerin çözümleri ortalama bir bilgisayar yapılandırmasında 5s’ nin altında sürmesidir, bu nedenle simülasyon parametrelerinin belirli aralıklarda taranması ciddi bir zaman kaybı yaratmamaktadır.

Bundan önceki örneklerde cismin boyutları çalışılan dalgaboyu mertebesinde. Yöntemin daha geniş cisimler durumundaki başarımını incelemek amacıyla son örnekte çapı yaklaşık  $4\lambda$  olan ve aşağıdaki parametrik denklemle verilen bir cisim

$$\begin{aligned} x_1 / \lambda &= (1.74 + 0.3 \cos 2\phi) \cos \phi \\ x_2 / \lambda &= (1.74 + 0.3 \sin 6\phi) \sin \phi \end{aligned} \quad (29)$$

ele alınmıştır. Cisim  $f = 1800$  MHz’de  $\theta_\ell = \ell\pi/3$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, 5$  ile aydınlatılmıştır. Bu örnekte çok daha yüksek bir gürültü oranı  $\xi = 0.3162$  ( $SNR = 10dB$ ) kullanılmıştır. Diğer simülasyon parametreleri  $\alpha = 2.1\lambda$ ,  $R = 19$ ,  $\beta = 2.22\lambda$ ,  $f_0 = 1.74\lambda$ ,  $M = 5$  ve  $P = 11$  seçilmiştir. Elde edilen sonuç Şekil 8’de gösterilmektedir. Sonuç olarak çoklu aydınlatma kullanılarak yöntemin hem gürültüye olan duyarlılığı azaltılmış hem de yöntemin rezonans bölgesinin dışında da çalışması sağlanabilmiştir.



Şekil 8. Çözülen şekille cismin gerçek şeklinin karşılaştırılması

## Sonuçlar

Bu çalışmada yanına erişilemeyen mükemmel elektrik iletken cisimlerin şekillerinin belirlenmesi için yeni bir yöntem sunulmuştur. Yöntemin uygulanabilirliği çeşitli sayısal sonuçlar aracılığıyla sınanmış ve yöntemin yıldız biçimli hem konveks hem de konkav şekiller için başarılı sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Yine sayısal sonuçlardan tek bir aydınlatmanın kullanılması durumunda cismin boyutlarının çalışılan dalgaboyu mertebesinde olması gerektiği ancak bu sınırlamanın birden çok aydınlatma kullanılarak iyileştirilebileceği gözlemlenmiştir. Daha sı geliş açılarının çeşitliliğini artırmanın yöntemin gürültüye olan duyarlılığını azalttığı belir-

lenmiştir. Bununla birlikte yöntemin ihtiyaç duyduğu uzak alan verisi miktarı örnekleme temelli yaklaşımlara göre oldukça azdır.

## Kaynaklar

- Abramowitz, M., ve Stegun, I., (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover.
- Bojarski, N., (1982). A survey of the physical optics inverse scattering identity, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*.
- Çayören, M., Akduman, I., Yapar, A. ve Crocco, L., (2007). A new algorithm for the shape reconstruction of perfectly conducting objects, *Inverse Problems*, 1087-1100.
- Çayören, M., Akduman, I., Yapar, A. ve Crocco, L. (2008). Shape reconstruction of perfectly conducting targets from single-frequency multiview data, *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letter*.
- Chong, E. ve Zak, S., (2001). *An introduction to optimization*, John Wiley ve Sons.
- Colton, D. ve Kirsch, A., (1996). A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region, *Inverse Problems*, 383-393.
- Colton, D. ve Kress, R., (1992). *Integral equation methods in Scattering Theory*, Malabar Florida: Krieger Publications.
- Colton, D. ve Kress, R., (1998). *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer-Verlag.
- Colton, D., Piana, M. ve Potthast, R., (1997). A simple method using Morozov's discrepancy principle for solving inverse scattering problems, *Inverse Problems*, 1477-1493.
- Imbriale, W. ve Mittra, R., (1970). The two-dimensional inverse scattering problem, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 633-642.
- Kirsch, A., (2004). The factorization method for Maxwell's equations, *Inverse Problems*.
- Kress, R., (2003). Newton's method for inverse obstacle scattering meets the method of least squares, *Inverse Problems*, 91-104.
- Lin, C. ve Kiang, Y., (1996). Inverse scattering for conductors by the equivalent source method, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 310-316.
- Morozov, V., (1984). *Methods for solving incorrectly posed problems*, Springer-Verlag.
- Pierri, R., Liseno, A. ve Soldovieri, F., (2001). Shape reconstruction from PO multifrequency scattered fields via the singular value decomposition approach, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*.
- Potthast, R., (2006). A survey on sampling and probe methods for inverse problems, *Inverse Problems*.
- Qing, A., Lee, C. ve Jen, L., (2001). Electromagnetic inverse scattering of two-dimensional perfectly conducting objects by real-coded genetic algorithm, *IEEE Transactions Geoscience and Remote Sensing*, 665-676.
- Rekanos, I., (2008). Shape reconstruction of a perfectly conducting scatterer using differential evolution and particle swarm optimization, *IEEE Transactions Geoscience and Remote Sensing*, 1967-1974.
- Roger, A., (1981). Newton-Kantorovitch algorithm applied to an electromagnetic inverse problem, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*.