

Düzlemsel kuvvetler etkisindeki dairesel levhaların serbest titreşimleri

İsmail BAYER*, M. Cengiz DÖKMECİ

İTÜ Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, Gemi İnşaatı Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada kalınlığı parabolik olarak değişen, düzlemsel kuvvetler etkisindeki eliptik levhaların bir özel hali olarak dairesel levhaların serbest titreşimleri incelenmiştir. Levhanın izotrop ve kenarlarından ankastre mesnetli olduğu kabul edilmiştir. Matematiksel modelde kartezyen koordinatlardaki yönetici denklem diferansiyel ve integral formda verilmiştir. Galerkin ve Rayleigh-Ritz yöntemlerinin kullanıldığı çözümde öncelikle sabit kalınlık halinde serbest titreşim ve elastik burkulma problemi incelenerek sonuçlar literatürdekilerle karşılaştırılmıştır. Değişken kalınlıklı levhaların hacimleri eşitlenerek, titreşim probleminde asal frekans parametresi ve burkulma probleminde ise kritik burkulma yükü parametresi karşılaştırılmıştır. Son olarak, düzlemsel kuvvetlerin sabit ve değişken kalınlıklı dairesel levhaların serbest titreşimi üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Stabilitate karakteristiklerinin bozulmasına rağmen titreşim karakteristiklerinin iyileştirilebileceği sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Burkulma, dairesel levha, değişken kalınlık, düzlemsel kuvvetler, titreşim*

Free vibrations of circular plates with in-plane forces

Abstract

Elastic stability and free vibrations of circular plates with parabolically varying thickness -as a special case of elliptical plates- are investigated. Plates are assumed to be linearly elastic, homogeneous, isotropic and clamped at the edges. Governing equations of the mathematical model are given as both differential equation and integral equation in Cartesian coordinates. While the differential equation formulation is solved by Galerkin method, the one given in integral equation form is solved by a well-known energy method called Rayleigh-Ritz technique. In order to test the accuracy of the numerical methods used and the validity of the results obtained, first free vibration and elastic buckling problems of circular plates with constant thickness are solved and then the numerical results are compared with the ones found in the literature. Plate thickness is considered to be of suitable form for the clamped case and volumes of all the plates are equalised to unity as well. Therefore, it is possible to compare the fundamental frequency parameter and the critical buckling load parameter of all plates with each other. Then, the effect of parabolically varying thickness on fundamental frequency parameter and critical buckling load parameter is investigated. Finally, the effect of in-plane forces on free vibrations of circular plates with both constant and parabolically varying thicknesses is investigated. It is concluded that vibration characteristics of circular plates can be improved, although stability characteristics gradually deteriorate.

Keywords: *Buckling, circular plates, in-plane forces, varying thickness, vibration*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: İsmail BAYER. bayer@yildiz.edu.tr; Tel: (212) 259 70 70 dahili: 2843.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Makine Fakültesi'nde tamamlanmış "Değişken kalınlıklı eliptik levhaların burkulması ve titreşimleri" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 20.11.2002 tarihinde dergiye ulaşmış, 25.12.2002 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.07.2003 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Levhalar yaygın olarak kullanılan yapı elemanlarıdır. Uygulamada daha çok sabit kalınlıklı levhalarla karşılaşılsa da, toplam ağırlığın azaltılmasının veya dinamik etkilere karşı dayanımın artmasının önem kazandığı yapılarda değişken kalınlıklı levhalar kullanılabilir.

Levhaların stabilite ve titreşim problemi yaklaşık bir asırdır araştırmacıların ilgisini çekmektedir. Özellikle pratikte sıkça rastlanan dikdörtgen ve dairesel şekle sahip levhalar üzerine yapılmış çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Leissa (1969) levhaların titreşimi üzerine o zamana kadar yapılmış olan teorik ve deneysel çalışmaları bir araya toplamıştır. Bu kaynakta düzlemsel kuvvetler etkisinde titreşen levhalar ya da değişken kalınlıklı levhalar üzerine yapılan çalışmaların sayısının fazla olmadığı görülmektedir. Bu çalışmanın konusuyla doğrudan ilgili olanlar sırasıyla Bickley (1933), Federhofer (1935) ve Wah (1962) tarafından yapılanlardır. Bickley (1933) kenarlarından çekme etkisindeki ankastre mesnetli, sabit kalınlıklı dairesel levhanın frekans parametrelerini tam olarak hesapladı. Federhofer (1935) ve Wah (1962) aynı problemi hem çekme hem de basınç kuvvetleri etkisindeki levhalar için çözdüler.

Kenarlarından ankastre mesnetli, değişken kalınlıklı dairesel levhanın serbest titreşimi üzerine ilk çalışmalar Conway (1958), Timoshenko ve Woinowsky-Krieger (1959) tarafından yapıldı. Günümüze kadar değişken kalınlıklı dairesel levhaların serbest titreşimleri üzerine daha bir çok çalışma yapılmasına rağmen düzlemsel kuvvetlerin etkisinin de aynı anda hesaba katıldığı bir çalışmaya rastlanmamıştır. Örneğin Olhoff (1970) serbest titreşen dairesel levhaların optimum dizaynını gerçekleştirdi. Buna göre ankastre mesnetli dairesel levhaların formu uygun şekilde değiştirildiği takdirde asal frekansını %53 oranında arttırmak mümkündür. Hinton v. diğ. (1993) Olhoff tarafından önerilen sonuçları doğruladılar. Bu konuda son zamanlarda yapılan çalışmalar genellikle eliptik levhalar üzerine

olup daire özel hali için de sonuçlar verilmektedir. Singh ve Tyagi (1985) kalınlığı parabolik olarak değişen eliptik levhaların simetrik enine titreşimlerine ait ilk dört frekans değerini ve bunlara ait titreşim mod şekillerini, kalınlık değişimini belirleyen eğrilik parametresi ve kenar oranına bağlı olarak verdiler. Daha sonra Singh ve Chakraverty (1991), değişken kalınlıklı dairesel ve eliptik levhaların enine titreşimlerini incelediler. Singh ve Chakraverty (1992), bu kez kalınlığı kuadratik olarak değişen dairesel ve eliptik levhaların enine titreşimlerini incelediler. Bahsedilen bu son üç çalışmada da levhaların kenarlarından ankastre mesnetli olduğu varsayılmış ve n terimli çökme fonksiyonuyla Ritz veya Galerkin yöntemleri kullanılarak frekanslar hesaplanmıştır. Singh ve Chakraverty (1994), bu kez iki boyutlu sınır karakteristik ortogonal polinomları kullanarak Rayleigh-Ritz yöntemiyle kenarlarından serbest, basit ya da ankastre mesnetli, değişken kalınlıklı eliptik ve dairesel levhaların enine titreşimlerini incelediler. Kalınlığın levha eksenlerine paralel olarak lineer ve kuadratik olarak, değiştiği iki farklı hal için sonuçlar verdiler. Bayer (1994) kalınlık değişiminin, kenarlarından ankastre mesnetli eliptik levhalar üzerindeki etkisini inceledi. Geometrik sınır koşullarını sağlayan beş terimli çökme fonksiyonuyla kolokasyon yöntemini kullanarak kalınlığın parabolik ve eksponansiyel olarak değiştiği iki farklı hal için eğrilik parametresine bağlı olarak sonuçlar verdi. Levha kenar oranı b/a küçüldükçe sonuçların hassasiyetinin azaldığı bu çalışma, levha hacimlerinin eşitlenerek değişken kalınlıklı levhalarla sabit kalınlıktaki levhaların frekans parametrelerinin karşılaştırılabilmesini sağlayan bir yöntem önermesi bakımından önemlidir. Bayer v. diğ. (2002) moment ve Rayleigh-Ritz yöntemlerini kullanarak parabolik kalınlık değişiminin serbest titreşen kenarlarından ankastre mesnetli eliptik levhaların asal frekansı üzerindeki etkisini incelediler. Çalışma daha çok uygulamalı elektromanyetik alanında kullanılan moment yönteminin, bir levha titreşim probleminde kullanılması açısından önemlidir. Dökmeci (1992) moment yöntemini uyguladığı çalışmasında yöntemin tarihçesini de vermiştir.

Kenarlarından düzgün basınç etkisindeki ankastre mesnetli daireSEL ve eliptik levhaların elastik burkulması üzerine yapılmış çalışmalarda genellikle sabit kalınlık halinin incelendiği görülmüştür. Woinowsky-Krieger (1937), problemi bir enerji yöntemiyle çözmüştür. Shibaoka (1956), Mathieu fonksiyonları kullanarak aynı problemin tam sonucunu elde etmiştir. Wang v. diğ. (1994), sabit kalınlıklı süper eliptik levhaların titreşimi ve burkulması üzerine yaptıkları çalışmada pb-2 Rayleigh-Ritz yöntemini kullanmışlar ve daire özel hali için de sonuçlar vermişlerdir. Spillers ve Levy (1990), düzlemsel kuvvetler etkisindeki levhaların optimum tasarımı konusunda çalışmışlar ve kenarlarından basit mesnetli, izotrop, kare şeklinde bir levhanın kritik burkulma yükünün arttırılabileceğini göstermişlerdir.

Bu çalışmada kenarlarından düzgün basınç veya çekme kuvveti etkisi altındaki değişken kalınlıklı daireSEL levhaların serbest titreşimlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Levhaların kenarlarından ankastre mesnetli olduğu ve kalınlığının da parabolik olarak değiştiği varsayılarak yaklaşık yöntemlerle öngörülen problem çözülmüş ve sonuçlar literatürde bulunanlarla karşılaştırılmıştır. Tüm levhaların birim hacimde olması sağlanarak titreşim probleminde frekans parametreleri, stabilite probleminde ise kritik burkulma yükü parametreleri karşılaştırılmıştır.

Matematiksel model

Bölge denklemleri

Çalışmanın bağlı olduğu temel denklemler önce diferansiyel formda daha sonra ise varyasyonel formda verilecektir.

Diferansiyel form- Orta düzlemine etki eden N sabit basınç kuvveti altında çalışan, değişken kalınlıklı izotrop bir levhanın, orta yüzeyinin düzlem kaldığı ve bu orta yüzeyin Kartezyen koordinat sisteminin x - y düzlemi ile çakıştığı kabulüyle enine titreşimlerdeki hareketi diferansiyel formda aşağıdaki denklemle verilir:

$$\nabla^2 (D\nabla^2 w) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N\nabla^2 w = 0 \quad (1)$$

w : Yer değiştirme
 ν : Poisson oranı
 ρ : Birim hacim başına kütleSEL yoğunluk
 h : Levha kalınlığı
 t : Zaman

Ayrıca denklemde yer alan eğilme rijitliği D aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$D = E h^3 / [12(1-\nu^2)] \quad (2)$$

E : Elastisite (Young) modülü

Bilindiği gibi Kartezyen koordinatlarda daireSEL levha geometrisi aşağıdaki bağıntıyla belirlenir:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3)$$

r : Dairenin yarıçapı

Basit harmonik hareket kabulünde çözüm aşağıdaki gibi aranır:

$$w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (4)$$

ω : Doğal frekans

Hareketin yönetici denklemini boyutsuz halde ifade etmek için $\bar{x} = x/r$ ve $\bar{y} = y/r$ şeklinde tanımlanır ve (1) denkleminde yerlerine konur.

$$\begin{aligned} & \frac{D}{r^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{y}^4} \right) + \frac{2}{r^4} \frac{\partial D}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{x}^3} \\ & + \frac{2}{r^4} \frac{\partial D}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \frac{2}{r^4} \frac{\partial D}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + \frac{2}{r^4} \frac{\partial D}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{y}^3} \\ & + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \bar{y}^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ & - \frac{(1-\nu)}{r^4} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 D}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} \right) \\ & + \frac{N}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2} \right) - \rho h \omega^2 w = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Levha kalınlığının aşağıdaki bağıntıya göre parabolik olarak değiştiği kabul edilmiştir.

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = c h_0 [\alpha + \beta(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)] \quad (6)$$

h_0 : Sabit kalınlıklı eşdeğer levhanın kalınlığı,
 α : Kalınlığın sabit kısmını belirleyen bir parametre, β : Kalınlık değişimini kontrol eden bir parametre, c ise levha hacminin her durumda sabit kalınlıklı eşdeğer levhanınkine eşit olmasını sağlayan bir parametredir ve aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$c = 2/(2\alpha + \beta) \quad (7)$$

Değişken kalınlıklı levhanın eğilme rijitliği şu şekilde ifade edilebilir:

$$D(\bar{x}, \bar{y}) = D_0 c^3 H \quad (8)$$

$$D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)} \text{ ve } H = [\alpha + \beta(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)]^3$$

olarak tanımlanmıştır.

Şimdi (8) ifadesi (5) nolu denklemde yerine konulacak olursa gözönüne alınan değişken kalınlıklı hal için hareketin yönetici diferansiyel denklemi boyutsuz halde elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} & c^3 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{y}^4} \right) + 2c^3 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{x}^3} \\ & + 2c^3 \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + 2c^3 \frac{\partial H}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + 2c^3 \frac{\partial H}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{y}^3} \\ & + c^3 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{y}^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (9) \\ & - c^3 (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 D}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} \right) \\ & + \gamma_1 \lambda_b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2} \right) - \gamma_2 \lambda^* c H^{1/3} w = 0 \end{aligned}$$

Burada $\lambda^2 = \sqrt{\lambda^*} = \omega r^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ frekans parametresi, $\lambda_b = N r^2 / D_0$ ise burkulma yükü

parametresi veya kritik yük parametresi olarak bilinir. Ayrıca (9) denkleminde görülen γ_1 ve γ_2 katsayıları şu şekilde tanımlıdır:

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 1 \text{ sadece titreşim} \quad (10a)$$

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 0 \text{ sadece burkulma} \quad (10b)$$

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1 \text{ burkulma ve titreşim} \quad (10c)$$

İntegral form- Aynı kabuller ve notasyon ile bölge denklemleri integral formda verilebilir. Orta düzlemine düzgün yayılı basınç kuvveti etkisi altındaki levhanın toplam enerji fonksiyoneli şu şekilde ifade edilebilir:

$$F = U - \gamma_1 V - \gamma_2 T \quad (11)$$

U :Levhanın eğilmesinden ötürü şekil değiştirme enerjisi,

V :Orta düzleme etki eden kuvvetlerin potansiyel enerjisi,

T :Levhanın kinetik enerjisi.

İntegral formdaki yönetici denklemin son hali, açık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} F = & \iint_S c^3 H \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2} \right)^2 d\bar{x} d\bar{y} \\ & - \iint_S 2c^3 (1-\nu) H \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2} \right)^2 d\bar{x} d\bar{y} \\ & - \iint_S \gamma_1 \lambda_b \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\} d\bar{x} d\bar{y} \\ & - \iint_S \gamma_2 \lambda^* c [\alpha + \beta(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)] w^2 d\bar{x} d\bar{y} \quad (12) \end{aligned}$$

S: Tüm levha alanı.

Başlangıç ve sınır koşulları

Genel olarak sınır koşullarının son derece problemlili olduğu ve idealize edilmiş koşulların pratikte gerçekleşmesinin çok zor olduğu bilinir. Ancak bu çalışmada levhaların kenarlarından ankastre mesnetli olduğu ve hareketin $t = 0$ 'da levhaya verilen ilk deplasman ile başladığı varsayılmıştır.

Ankastre mesnetli halde levhanın kenarları boyunca çökme ve eğim sıfırdır:

$$w = 0 ; \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} = 0 \text{ ve } \frac{\partial w}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (13)$$

Yaklaşık çözüm yöntemleri Deneme fonksiyonlarının seçimi

Diferansiyel formda verilen yönetici denklem bir ağırlıklı artıklar yöntemi olan Galerkin yöntemiyle (GY), integral formda verilen ise bir enerji yöntemi olan Rayleigh-Ritz yöntemiyle (R-RY) yaklaşık olarak çözülmüştür. Bu iki güçlü yöntemin aynı deneme fonksiyonuyla uygulanması halinde birbirinden farksız sonuçlar vereceği bilindiğinden her iki yöntem için sınır koşullarını sağlayan farklı iki deneme fonksiyonu seçilmiştir. Galerkin yöntemiyle kullanılan çökme fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$w = (a_1 + a_2\phi + a_3\phi^2)\phi^2 \quad (14)$$

Burada a_1, a_2, a_3 belirlenmemiş katsayılardır ve $\phi = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 1$ olarak tanımlıdır. Rayleigh-Ritz yöntemiyle kullanılan çökme fonksiyonu ise şöyledir:

$$w = (a_1 + a_2\bar{x}^2 + a_3\bar{y}^2)\phi^2 \quad (15)$$

Galerkin yöntemi

Ağırlıklı artıklar yöntemi, genelde, modeldeki bağımsız değişkeni ifade etmek için seçilen “deneme fonksiyonu”nun sınır koşullarını sağlamasına rağmen ilgili yönetici diferansiyel denklemi sağlamayacağını varsayar. Böylece, deneme fonksiyonunun yönetici diferansiyel denklemde yerine konmasıyla ε_R ile gösterilen bir artık ortaya çıkacaktır. “En iyi” çözümü elde etmek için, bu artıkların problemin tanımlandığı tüm bölge üzerindeki toplamının minimum olması istenir. Bu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_R d\Omega = \text{minimum} \quad (16)$$

Bu amaca ulaşılmasında seçenekler, artığın ağırlıklı bir değerinin bölge boyunca minimum

olmasını sağlayarak genişletilebilir. Ağırlık fonksiyonu, artıkların ağırlıklı integralinin sıfır değerine erişmesini sağlar. Ağırlık fonksiyonu φ ile gösterilecek olursa, yukarıdaki daha genel hali şu şekilde ifade edilebilir:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_R \varphi d\Omega = 0 \quad (17)$$

Ağırlık fonksiyonları çok çeşitli şekillerde seçilebilir ve her seçim ağırlıklı artıklar yönteminde farklı bir kritere karşılık gelir. Örneğin, Galerkin yönteminde, (14) ile verilen deneme fonksiyonun her bir katsayısının çarpanı olan terimler ağırlık fonksiyonu olarak seçilir. Galerkin denklemleri artığın bahsedilen ağırlık fonksiyonuyla çarpımının bölge üzerinde integre edilmesiyle bulunur. Sonuç olarak bir homojen denklem takımı elde edilir:

$$[A - \gamma_1 \lambda_b B - \gamma_2 \lambda^* C] \{a_i\} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (18)$$

A, B, C : Simetrik kare matrisler.

Bu bir özdeğer problemidir ve çözümün sıfırdan farklı olması ancak katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması halinde mümkündür.

Rayleigh-Ritz yöntemi

Asal frekans ve burkulma yükü parametresi için en küçük bir üst limit bulabilmek amacıyla (15) ile verilen deneme fonksiyonu (12) denkleminde yerine konup a_i katsayılarına bağlı olarak minimize edilir.

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (19)$$

Gerekli integraller alındıktan sonra (18) ile verilene benzer bir homojen denklem takımı elde edilir.

Sonuçlar ve değerlendirme

Serbest titreşim hali ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$)

Her iki yöntemle elde edilen sonuçlar Tablo 1 de görülmektedir. Levha eğrilik parametresi β arttıkça ve sabit kalınlık parametresi α

azaldıkça eşit hacimdeki levhaların frekans parametresi değerleri büyümektedir.

Tablo 1. Frekans parametresi değerleri

β	$\alpha= 1.0$		$\alpha= 0.2$	
	GY	R-RY	GY	R-RY
0.0	10.216	10.217	10.216	10.217
0.2	10.572	10.583	11.483	11.822
0.4	10.861	10.903	12.159	13.178
0.6	11.101	11.198	12.678	14.299
0.8	11.305	11.478	13.120	15.211
1.0	11.483	11.749	13.505	15.959

Galerkin yöntemiyle elde edilen sonuçların literatürdekilere daha yakın olduğunu söylemek mümkündür. Örneğin, $\alpha=0.0$ ve $\beta=1.0$ özel hali, Olhoff (1970) tarafından bulunan optimum şekle en yakın haldir. Bu halde Galerkin ve Rayleigh-Ritz yöntemleriyle asal frekans parametresinde sırasıyla %83 ve %140'lık artışlar hesap edilmiştir.

Elastik burkulma hali ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$)

Bu halde öngörülen kalınlık değişiminin burkulma problemini olumsuz yönde etkilediği Tablo 2'de görülmektedir.

Tablo 2. Burkulma yükü parametresi değerleri

β	$\alpha= 1.0$		$\alpha= 0.6$	
	GY	R-RY	GY	R-RY
0.0	14.68	14.70	14.68	14.70
0.2	13.98	14.15	13.47	13.84
0.4	13.22	10.903	12.24	13.26
0.6	12.48	11.198	11.19	12.93
0.8	11.80	11.478	10.35	12.77
1.0	11.19	11.749	9.69	12.71

Levha eğriliği arttıkça her iki yöntemle elde edilen sonuçların da hassasiyeti tartışmaya açıktır.

Titreşim ve burkulma hali ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$)

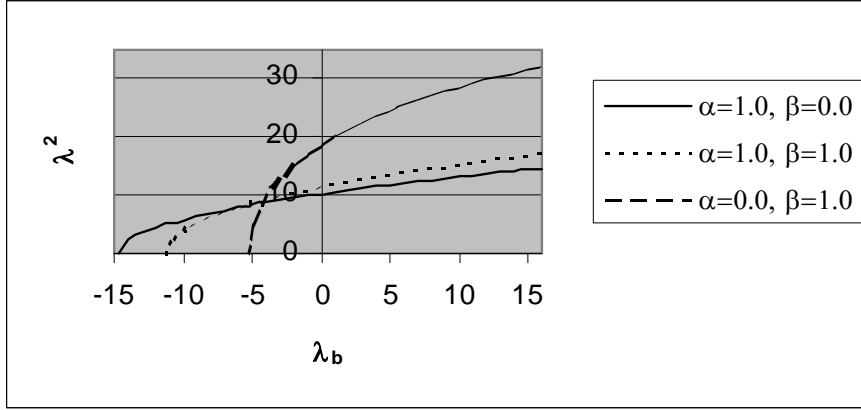
Düzlemsel kuvvetlerin etkisinde serbest titreşen değişken kalınlıklı, ankastre mesnetli dairesel levhaların asal frekans parametresi değerleri her iki yöntemle hesaplanmış ve bulunan sonuçlar Tablo 3 ve Tablo 4'te gösterilmiştir. Sadece sabit kalınlık hali için Federhofer (1935) tarafından bulunan sonuçlarla karşılaştırma yapılabilmektedir. Bu hal için her iki yöntemle elde edilen sonuçların da oldukça hassas olduğu görülmektedir. Ayrıca sabit kalınlık hali Şekil 1 ve Şekil 2'de grafik olarak gösterilmiştir.

Tablo 3. Düzlemsel kuvvetler etkisi altındaki değişken kalınlıklı dairesel levhanın ($\alpha = 1.0$) Galerkin yöntemiyle hesaplanan frekans parametresi değerleri

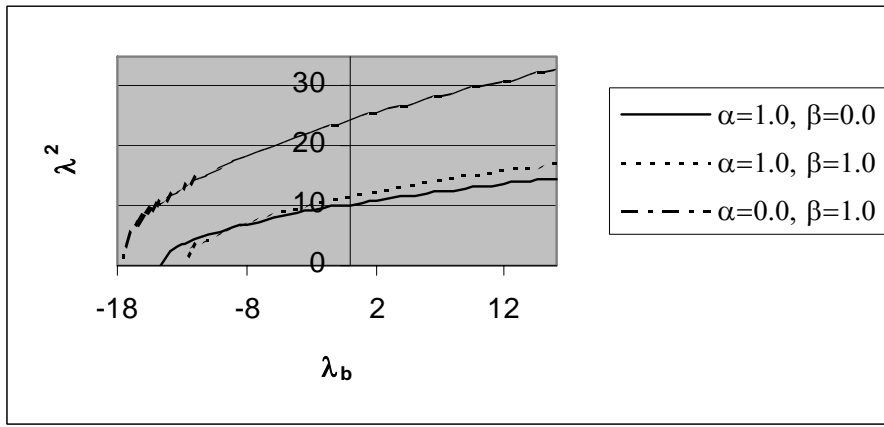
Nr^2/D	16.0	9.0	4.0	1.0	0.0	-1.0	-4.0	-9.0
Federhofer	14.603	12.885	11.485	10.548	10.215	9.871	8.746	6.413
$\beta = 0$	14.602	12.885	11.486	10.549	10.216	9.870	8.746	6.412
$\beta = .2$	15.224	13.415	11.930	10.929	10.572	10.200	8.982	6.397
$\beta = .4$	15.788	13.887	12.314	11.245	10.861	10.461	9.139	6.252
$\beta = .6$	16.305	14.313	12.651	11.512	11.101	10.671	9.238	6.001
$\beta = .8$	16.783	14.703	12.953	11.744	11.305	10.845	9.296	5.662
$\beta = 1$	17.227	15.062	13.227	11.949	11.483	10.992	9.326	5.249

Tablo 4 Düzlemsel kuvvetler etkisi altındaki değişken kalınlıklı dairesel levhanın ($\alpha = 1.0$) Rayleigh-Ritz yöntemiyle hesaplanan frekans parametresi değerleri

Nr^2/D	16.0	9.0	4.0	1.0	0.0	-1.0	-4.0	-9.0
Federhofer	14.603	12.885	11.485	10.548	10.215	9.871	8.746	6.413
$\beta = 0\beta$	14.603	12.886	11.487	10.550	10.217	9.872	8.748	6.417
$\beta = .2$	15.226	13.418	11.937	10.939	10.583	10.214	9.004	6.456
$\beta = .4$	15.792	13.898	12.337	11.281	10.903	10.510	9.219	6.458
$\beta = .6$	16.314	14.339	12.705	11.596	11.198	10.784	9.419	6.462
$\beta = .8$	16.799	14.750	13.050	11.894	11.478	11.045	9.615	6.487
$\beta = 1$	17.254	15.138	13.379	12.180	11.749	11.300	9.811	6.535



Şekil 1. Düzlemsel kuvvetler etkisindeki dairesel levhanın frekans parametresi (GY)



Şekil 2. Düzlemsel kuvvetler etkisindeki dairesel levhanın frekans parametresi (R-RY)

Sonuç olarak ankastre mesnetli dairesel levha için öngörülen parabolik kalınlık değişimi serbest titreşim karakteristiklerini olumlu yönde etkilemektedir. Ancak levhanın orta bölgesindeki kalınlığın levha kenarındaki kalınlığa göre daha az olduğu bu halde levhanın kritik burkulma yükü parametresi azalmaktadır. Bununla birlikte düzlemsel kuvvetler etkisinde serbest titreşim halinde asal frekans parametresinde hala kazanç söz konusudur.

Kaynaklar

- Bayer, I., Güven, U. ve Altay, G., (2002). A parametric study on vibrating clamped elliptical plates with variable thickness, *Journal of Sound and Vibration*, **254**, 1, 179-188.
- Bayer, I., (1994). On the effect of varying thickness on the fundamental frequency of clamped elliptic plates, *Proceedings*, 19th Congress, International Council of the Aeronautical Sciences, 2276-2279 Anaheim, California, U.S.A.

- Bickley, W. G., (1933). Deflections and vibrations of a circular elastic plate under tension, *Phil. Mag.*, **15**, 100, 776-797.
- Conway, H. D., (1958). Some special solutions for the flexural vibration of discs of varying thickness, *Ingr.-Arch.*, **26**, 408-410.
- Dökmeci, M. C., (1992). The method of moments for vibrations of piezoelectric laminae, *Proceedings of Ultrasonics Symposium*, IEEE, 1025-1028 New York, U.S.A.
- Federhofer, K. (1935). Beugungsschwingungen in ihrer mittelebene belasteten kreisplatte, *Ingr.-Arch.*, **6**, 68-74.
- Hinton, E., Özakça, M. ve Sienz, J., (1993). Optimum shapes of vibrating axisymmetric plates and shells, *Journal of Sound and Vibration*, **167**, 3, 511-528.
- Leissa, A. W., (1969). *Vibration of Plates*. (NASA SP-160) U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.
- Olhoff, N., (1970). Optimal design of vibrating circular plates, *International Journal of Solids and Structures*, **6**, 139-156.

- Shibaoka, Y., (1956). On the buckling of an elliptic plate with clamped edge, *Journal of Physical Society of Japan*, **11**, 10, 1088-1091.
- Singh, B. ve Chakraverty, S., (1991). Transverse vibration of circular and elliptic plates with variable thickness, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **22**, 787-803.
- Singh, B. ve Chakraverty, S., (1992). Transverse vibration of circular and elliptic plates with quadratically varying thickness, *Applied Mathematical Modelling*, **16**, 269-274.
- Singh, B. ve Chakraverty, S., (1994). Use of characteristic orthogonal polynomials in two dimensions for transverse vibration of elliptic and circular plates with variable thickness, *Journal of Sound and Vibration*, **173**, 3, 289-299.
- Singh, B. ve Tyagi, D. K., (1985). Transverse vibrations of an elliptic plate with variable thickness, *Journal of Sound and Vibration*, **99**, 3, 379-391.
- Spillers, W. R. ve Levy, R., (1990). Optimal design for plate buckling, *Journal of Structural Engineering*, **116**, 3, 850-858.
- Timoshenko, S. P., ve Woinovsky-Krieger, S., (1959). *Theory of Plates and Shells*. Mc Graw Hill, New York.
- Wah, T., (1962). Vibration of circular plates, *J. ASA*, **34**, 3, 275-281.
- Wang, C. M., Wang, L. ve Liew, K. M., (1994). Vibration and buckling of super elliptical plates, *Journal of Sound and Vibration*, **171**, 3, 301-314.
- Woinovsky-Krieger, S., (1937). The stability of a clamped elliptic plate under uniform compression, *Journal of Applied Mechanics*, **4**, 177-178.