itüdergisi/*d*
mühendislik
Cilt:4, Sayı:1, 37-42
Şubat 2005

Doğrusal ve karesel optimizasyon problemleri için dinamik çözümleyiciler

Yüksel ÇAKIR*, Cüneyt GÜZELİŞ

İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, eniyileme (optimization) kuramındaki geleneksel gradyan izdüşürme (projeksiyon) yöntemi temel alınarak doğrusal kısıtlı (linearly constrained), doğrusal (linear) ve dördün (quadratic) eniyileme problemleri için gradyan izdüşürmeli ağ (gradient projecting network) olarak adlandırılan yeni bir çözümleyici tanıtılmaktadır. Bu dinamik system, gradyan izdüşürme yönteminin (gradient projection method) sürekli hal gerçeklemesidir. Gradyan izdüşürme işleminden dolayı önerilen çözümleyicinin sağ tarafı, gradyan ya da gradyan-gibi (quasi-gradient) sistemlerden farklı olarak, süreksiz yapıdadır. Buna rağmen önerilen ağ, gradyan ve gradyan-gibi sistemlerin yakınsama özelliklerine sahiptir. Tanıtılan sistemin yakınsayan olduğu, yani, her bir çözümün denge noktasında sonlandığı La Salle'nin değişmez küme teoreminin, sağ tarafı süreksiz sistemler için genişletilmesi ile gösterilmiştir.
Anahtar Kelimeler: *Kısıtlı eniyileme, gradyan izdüşürme, dinamik çözümleyici*

Dynamic solvers for linear and quadratic optimization

Abstract

In this study, a dynamic solver for linearly constrained linear and quadratic optimization problems, called gradient projection network, is introduced. The system is gradient based. Gradient dynamical systems are described by a set of differential equations in a state equation form whose vector field is produced by the gradient of a scalar function, called energy. These systems do not have complex dynamics like oscillation so that any bounded solution of them converges to one of the equilibrium points which are indeed extreme of the associated energy function. As a consequence of their dynamical properties, gradient systems have been widely used as natural models for solving unconstrained minimization problems by considering the cost function as the energy. Constrained minimization problems can also be solved in the same way, by adding to the cost some penalty function terms representing constraint violations. In the proposed dynamics, feasibility of solutions is satisfied by utilizing the concept of projection to feasible region. Because of projection operation the proposed dynamics is discontinuous, so it is not gradient but has the properties similar to that of gradient systems. To show this, La Salle's Invariance Theorem has been extended to a system with discontinuous right-hand side, and based on this extension it is shown that the introduced dynamical solver is convergent, i.e., any trajectory of it ends at one of the equilibria.
Keywords: *Constrained optimization, gradient projection, dynamic solver*

---

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Yüksel ÇAKIR. yuksel@ehb.itu.edu.tr; Tel: (212) 285 36 15.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi'nde tamamlanmış "Dynamic solvers for linear and quadratic optimization" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 12.09.2003 tarihinde dergiye ulaşmış, 17.11.2003 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.06.2005 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Son yıllarda, Hopfield ile başlamak üzere, eniyileme problemleri için birçok dinamik çözümleyici önerilmiştir (Zak vd., 1995; Bozerdoum ve Pattison 1993; Pekergin vd., 1999; Smith, 1999). Eniyileme problemlerinin çözümü için bu tür bir yol izlenmesinin nedeni bu yapıdaki çözümleyicilerin devre olarak gerçeklenebilmesi, dolayısıyla çözümün gerçek zamanda elde edilebilmesidir. Ardışıl yapıda çalışan geleneksel çözümleyicilerle kıyaslandığında dinamik çözümleyiciler paralel yapıda gerçeklenebilmelerinden dolayı daha kısa sürede çözüm üretmekteler. Bir diğer farkları da, geleneksel tekniklerle hesaplamalarda elde edilen değerler ayrıkken dinamik çözümleyicilerle elde edilen çözümlerin sürekli yapıda olmasıdır.

Genel olarak dinamik çözümleyicilerde enerjisi azalan dinamik yapı kullanılmaktadır. Bu yapılarda sistem dinamiği, enerji fonksiyonu olarak kabul edilen eniyileme problemindeki amaç ölçütünü (cost function) zamanla azaltacak biçimde tasarlanır, öyle ki, değer fonksiyonu enaz (minimum) değerine ulaşıp sistem dengeye oturduğunda denge noktası optimizasyon probleminin çözümüne karşılık gelsin. Denge durumunda enerji fonksiyonunun gradyanı sıfır olmakta ki bu da aynı zamanda bu durumun optimizasyon probleminin ekstremum noktası olması için gerek şarttır. Gradyan sistem olarak adlandırılan bu türdeki sistemlerin tasarımında, Rus matematikçi ve mühendis A. M. Liapunov'un dinamik sistemlerin kararlılık analizi için önerdiği ve kendi adıyla anılan yöntemindeki fikir temel alınmaktadır (Hirsch ve Smale 1974). Yöntem, dinamik sistemin enerjisini temsil eden pozitif değerli, sınırlı, zamanla azalan ve sonunda minimum değerinde sabit kalan bir Liapunov fonksiyonunun oluşturulabilmesine dayanmaktadır. Böyle bir fonksiyonun varlığı durumunda sistemin kararlı olduğu, yani çözümün kararlı bir denge noktasında sonlandığı bilinmektedir. Gradyan sistemlerin ortak özelliği, çözümlerin sınırlı olması durumunda bu çözümlerin her zaman bir denge noktasında sonlanıyor olmasıdır, yani sistem yakınsayan yapıdadır. Gradyan sistemlerin bir diğer özelliği limit çevrim veya kaotik yapılı çözümlerinin olmamasıdır.

Gradyan sistemlerde, verilen bir ilk koşula göre enerji fonksiyonunu en az yapan en yakın denge noktası bulunur. Bu yapılarından dolayı bu türdeki sistemlerin eniyileme problemleri için ürettiği çözümler yereldir (lokal). Birçok eniyileme probleminde, özellikle kombinatoryal yapıdakilerde, global en iyi çözümü elde etmek için gereken süre problem boyutuyla üstel biçimde artar (Vavasis 1991, Cichocki ve Unbehauben 1993). Bu türdeki problemler için yaklaşık çözümler de anlamlıdır. Gradyan temelli yöntemlerle bu türdeki optimizasyon problemleri için tatmin edici yaklaşık çözümler elde edilebilmektedir (Pekergin vd., 1999).

Kısıtlı optimizasyon problemleri de, uygun enerji fonksiyonu oluşturularak gradyan temelli dinamik yapılarla çözülebilirler. Enerji fonsiyonunun oluşturulmasında izlenen yolardan biri, değer fonksiyonuna ek olarak, kısıt şartlarından oluşan bileşenlerin de enerji fonksiyonuna hata terimi olarak eklenmesidir, öyle ki, kısıt şartları sağlanmadığı sürece bu hata terimleri pozitif değerli bileşenler olarak enerji fonksiyonunda yer almaktalar, kısıt şartları sağlandığında ise değerleri sıfır olmaktadır. Bu yöntem penaltı yöntemi olarak adlandırılmakta ve çözüme kısıtların sağlanmadığı geçersiz (unfeasible) bölgeden yaklaşıldığından dış yöntemlerden sayılmaktadır. Bu yöntem ile geçersiz çözümler elde edilebilmektedir. Bunun sebebi, pratikte penaltı parametrelerinin uygun değerlerde seçilememesidir.

Kısıtlı optimizasyon problemlerinin kısıtsız hale getirilmesinde izlenen diğer bir yol engelli fonksiyon yöntemidir. Bu yöntemde enerji fonksiyonuna, geçerli bölge sınırlarında sonsuz değerlere ulaşan terimler eklenir. Bu yöntem, çözüme her zaman geçerli bölgeden yaklaşıldığından, iç yöntemlerden sayılmaktadır. Sınırdaki noktalara ulaşılamadığından bu yaklaşım, çözümleri kısıt bölgesi sınırlarında olan problemler için uygun değildir.

Kısıtlı problemlerin çözümündeki bir diğer yaklaşım da gradyan izdüşürmeli yöntemin kullanılmasıdır. Bu yöntemde kısıt şartları sağlandığı sürece değer fonksiyonu gradyanının tersi doğrultusunda gidilerek en az aranır. Herhangi bir kısıt ihlali durumunda, başka bir deyişle geçerli bölge sınırındayken negatif gradyan bileşeni geçersiz bölgede elde ediliyorsa, negatif gradyan, kısıt şartının belirlediği yüzeye izdüşürülerek en az değer araması izdüşürülmüş bu gradyan bileşeni doğrultusunda sürdürülür (Luenberger, 1973). Eniyileme probleminin enaz değerine, izdüşürülmüş gradyan değeri sıfır olduğunda ulaşılır. Bu durumda ya gradyan değeri sıfırdır (ki bu da eniyileme probleminde enaz için birinci derece şartların sağlanması anlamını taşır) ya da negatif gradyan kısıt yüzeyine dik ve geçersiz bölge doğrultusundadır demektir. İkinci durum hareket edilebilecek bir yön olmaması anlamını taşır, dolayısıyla ulaşılan nokta eniyileme probleminin enazıdır.

Bu çalışmada önerilen dinamik çözümleyici, gradyan izdüşürme yöntemi temel alınarak tasarlanmıştır. Önerilen sistem gradyan ya da gradyan-gibi (quasi-gradient) olmamasına rağmen gradyan dinamik sistemlerin yakınsama özelliklerine sahiptir. Önerilen dinamik çözümleyicinin yakınsayan yapıda olduğu La Salle'nin değişmez küme teoreminin (La Salle, 1960) sağ tarafı süreksiz sistemler için genişletilmesiyle ispatlanmıştır.

Gradyan dinamik system

Gradyan sistemler

$$\dot{x} = -\nabla V(x); \quad x \in R^n \tag{1}$$

biçiminde tanımlı dinamik sistemlerdir. Bu sistemlerin yakınsayan yapıda olduğunun ispatı La Salle'nin değişmez küme teoremi ile gösterilir.

Teorem 1 (La Salle, 1960) $\dot{x} = f(x); f(\cdot) \in C^1$ ifadesi ile tanımlı sistem gözönüne alınsın. $V(\cdot): R^n \to R$ de tanımlı, türetilebilir ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir Liapunov fonksiyonunun olduğu varsayılsın:

i) $\Omega_r = \{x \in R^n \mid V(x) \le r\}$ kümesi $r > 0$ değerleri için sınırlı bir küme olsun,

ii) $V(\cdot)$ fonksiyonu Ω_r kümesindeki değerler için alttan sınırlı olsun,

iii) $\dot{V} \le 0 \quad \forall x \in \Omega_r$ olsun.

Bu durumda $x_0 = x(0) \in \Omega_r$ değerinden başlayan her $x(t, x_0, 0)$ çözümü, $S := \{x \in \Omega_r \mid \dot{V}(\cdot) = 0\} \subset \Omega_r$ de bulunan bir en geniş değişmez kümede (largest invariant set) sonlanır.

Değişmez kümede denge noktalarının yanısıra limit çevrimler de bulunabilir. Aşağıda verilen teoremin sağlanması halinde en geniş değişmez kümenin denge noktalarından meydana geldiği görülür (Chua ve Wang, 1978).

Teorem 2 (Chua ve Wang, 1978):

$\dot{x} = f(x); f(\cdot) \in C^1$ ile tanımlı otonom sistemin çözümleri sınırlı ise ve sisteme ilişkin, tüm çözüm eğrileri boyunca $\dot{V} \le 0 \; \forall x \in R^n$ olan ve ancak denge noktası için $\dot{V} = 0$ olan bir $V(\cdot)$ Liaapunov fonksiyonu varsa sistem yakınsayandır, başka bir deyişle çözümlerin ulaştığı en geniş değişmez küme denge noktalarından meydana gelmektedir.

Gradyan sistemlerin önemli bir özelliği de asimptotik kararlı denge noktalarının enerji fonksiyonunun kesin (strict) yerel enazlarına karşılık gelmesidir. Bu özellik gradyan dinamik sistemleri eniyileme problemlerine çözümleyici olarak kullanılabilir kılmaktadır.

Gradyan izdüşümlü dinamik sistem

Bu çalışmada (2) biçiminde tanımlanan doğrusal kısıtlı, dördün optimizasyon problemleri için gradyan temelli bir dinamik çözümleyici önerilmektedir.

$$\min \Phi(x) = x^T Q x + c^T x \, ; \mathrm{g(x) = Ax - b} \le 0 \, . \tag{2}$$

Bu ifadede;

$A \in R^{n \times n}, \quad b \in R^m$ ve

$g_i(x) = (Ax - b)_i \quad i \in M := \{1, 2, ..., m\}$.

Önerilen çözümleyicinin dinamik yapısı (3) denklemiyle verilmektedir.

$$\dot{x} = -P_{I_a}(x).\nabla E(x) \tag{3}$$

Bu denklemde görülen $E(x)$, eniyileme problemindeki $\Phi(x)$ amaç ölçütüne karşılık gelmektedir P_{I_a} ise I_a'ya bağlı izdüşürme matrisi olup denklemi (4)'de verildiği gibi elde edilmektedir.

$$P_{I_a} = \left[I - G_{I_a}^T (G_{I_a} G_{I_a}^T)^{-1} G_{I_a}\right]. \tag{4}$$

Bu ifadede görünen I_a indis kümesi olup

$$I_a = \{i \in M \mid g_i(x) = 0 \ ve \\ -\nabla g_i(x).\nabla\Phi(x) \geq 0\} \tag{5}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Bu kümede, aktif olan, başka bir deyişle, eşitlik durumuna gelen ve ayni zamanda da gradyanları geçersiz bölgeyi işaret eden kısıtların numaraları tutulmaktadır. Doğrusal kısıt durumunda:

$$g_i(x)^T = \nabla(Ax - b)_i^T = (A)_i \tag{6}$$

buna göre de I_a'ya ilişkin ifade

$$I_a = \{i \in M \mid (Ax - b)_i = 0 \ ve \\ -(A)_i.\nabla\Phi(x) \geq 0\} \tag{7}$$

biçimini almaktadır. G_{I_a} matrisi, indisleri I_a'da tutulan aktif kısıtlardan oluşmuş kısıt matrisidir. Bu matrisin boyutu $|I_a| \times n$ olup her bir $j(i) \in \{1,2,...,|I_a|\}$ satırı i. indise bağlı olarak $(G_{I_a})_{j(i)} = (A)_i$ biçiminde oluşturulmaktadır, başka bir ifadeyle G_{I_a} matrisi aktif olup aynı zamanda gradyanı geçersiz bölgeyi işaret eden kısıtlardan oluşmaktadır.

Dinamik ifadesi (3)'de verilen çözümleyicinin, P_{I_a} matrisi x'e göre değişim gösterdiğinden, sağ tarafı süreksiz bir yapıdadır. Bununla birlikte herhangi bir $x(0) \in K := \{x \mid Ax \leq b\}$ başlangıç koşulu için çözüm yine de vardır, tektir ve süreklidir fakat türetilebilir değildir. Aynı zamanda bu çözüm K polihedral bölgesinde kalmaktadır. Çözümün varlığı ve tekliği şu şekilde gösterilebilir. Her bir $x(0) \in K$ başlangıç koşulu için $l \in \{0,1,...,m\}$ tane kısıtın aktif olduğu ve gradyanlarının geçersiz bölgeyi gösterdiği varsayılsın. Bu kısıtların belirlediği hiperyüzeyde (2) sistemi lineer durum denklemleriyle ifade edilen sistem yapısındadır. Bu nedenle, bu bölgede başlayan ve bölge içinde kalan çözüm eğrileri tektir, süreklidir ve türetilebilirler. Bölge dışına çıkan çözüm eğrileri yeni bir aktif kısıt kümesinin oluşturduğu hiperyüzeydeki başlangıç koşulunu oluşturmaktadırlar, bu nedenle bu yeni bölgede de çözüm vardır tektir ve süreklidir. Toplam çözüm eğrisi bu türdeki bölgesel çözümlerinin birleşiminden oluşur, tektir, süreklidir fakat hiperyüzey sınırlarında türetilebilir değildir. Bununla birlikte herhangi bir başlangıç durumu için çözüm var ve tek olduğundan çözüm eğrisi sağ taraftan türetilebilir yapıdadır.

Önerilen dinamik çözümleyicinin yakınsayan yapıda olduğunun ispatı için enerji fonksiyonunun gradyan sistemlerdeki gibi zamanla azalan yani $\dot{V}(x) = [\nabla V(x)]^T f(x) \leq 0$ olduğunun gösterilmesi gerekir. Önerilen gradyan temelli çözümleyicinin sağ tarafı sürekli olmadığından, bu ispat, gradyan sistemlerde olduğu gibi yapılamaz. Bu nedenle, bu yapıdaki sistemlerin analizinde La Salle'nın yaptığına benzer olarak (La Salle, 1968), çözümün sağdan türetilebilir olma özelliği kullanılarak sistemin yakınsayan olduğu ispatlanacaktır. Bu amaçla öncelikle türev tanımı tekrar verilecektir.

Tanım 1: $x(\cdot): R \to R^n$ fonksiyonunun sağdan türevi $\dfrac{dx(t)}{dt^+} = \lim_{\Delta \to 0^+} \dfrac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta}$ biçiminde tanımlanmaktadır. Burada $\Delta \to 0^+$ sıfıra pozitif sayılardan yaklaşıldığını belirtmektedir.

Şengör ve diğerleri, (1999)'daki ispata benzer olarak burada da:

$$\frac{d(E\circ x)(t)}{dt^{+}}=\left[\nabla E(x)\right]^{T}\frac{d(x(t))}{dt^{+}}$$

olduğu gösterilebilir. Bu ifade ışığında enerji fonksiyonunun zamanla azaldığı gösterilecektir.

Varsayım 1: Dinamik yapısı (3) ile verilen sisteme ilişkin enerji fonksiyonu $E(x)=x^{T}Qx+c^{T}x$ biçiminde olsun. Bu durumda, her $x\in K:=\{x|\ Ax\le b\}$ için $\frac{d(E\circ x)(t)}{dt^{+}}\le 0$ ve ancak denge noktası olan x değerleri için $\frac{d(E\circ x)(t)}{dt^{+}}=0$'dır.

İspat: Karesel enerji fonksiyonu $E(x)$ sürekli ve x'e göre türetilebilir yapıdadır. Cözüm eğrisi $x(\cdot)$'de sürekli ve zamana göre sağdan türetilebilir yapıdadır. Buna göre:

$$\frac{dE(x(t))}{dt^{+}}=\frac{d(E\circ x(t))}{dt^{+}}=$$

$$\left[\nabla E(x)\right]^{T}\frac{d(x(t))}{dt^{+}}=\left[\nabla E(x)\right]^{T}P_{I_a}(x)\nabla E(x)\ \text{olur.}$$

İzdüşürme matrisi simetrik ve idempotent özelliktedir, yani $P_{I_a}^{T}=P_{I_a}$ ve $P_{I_a}.P_{I_a}=P_{I_a}$. Bu özellik kullanılarak yukarıdaki ifade $\frac{d(E\circ x(t))}{dt^{+}}=-\left\|\left[\nabla E(x)\right]^{T}P_{I_a}(x)\right\|^{2}$ halini alır. Bu sonuç enerji fonksiyonunun, çözüm eğrileri boyunca zamanla artmayan yapıda olduğunu, ve ancak ve ancak $P_{I_a}(x)\nabla E(x)=0$ iken $\frac{d(E\circ x(t))}{dt^{+}}=0$ olduğunu göstermektedir.

Daha önceden Şengör ve diğerleri, (1999)'da birim hiperküp kısıt bölgesi için (3) ile verilen çözümleyicinin yakınsayan yapıda olduğu gösterilmişti. Burada, benzer yolla herhangi bir $K:=\{x|\ Ax\le b\}$ polihedral kısıt bölgesi için de çözümleyicinin yakınsayan yapıda olduğu ispatlanmaktadır.

Teorem 3: (3) ifadesiyle verilen otonom sistem ve buna ilişkin $E(x)=x^{T}Qx+c^{T}x$ skaler fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu sistemin $K:=\{x|\ Ax\le b\}$ bölgesinde başlayan her çözümü bir denge noktasında sonlanır.

İspat: Her $x_0=x(0)\in K$ başlangıç durumu için elde edilen $x(t,x_0,0)$ çözümü izdüşürme işlemi gereği sınırlıdır ve K polihedral bölgede kalmaktadır. $E(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur ve o da K polyhedral bölgede sınırlı kalmaktadır. Varsayım 1 gereği $\frac{dE(x(t))}{dt^{+}}\le 0\quad \forall x\in K$, bu da $E(x(t,x_0,0))$'in çözüm eğrileri boyunca artmayan yapıda olduğunu göstermektedir. $E(x)$ fonksiyonunun alttan sınırlı olduğu da göz önüne alındığında, $E(x(t,x_0,0))$'in zamanla E^{*} gibi bir limit değere yakınsadığını, yani $\lim_{t\to\infty}E(x(t,x_0,0))=E^{*}$ olduğunu göstermektedir. Sürekli olmasından dolayı, $E(x(t,x_0,0))$ zamanla E^{*} limit değerine yakınsarken $x(t,x_0,0)$ de $\{x^{*}|\ E(x^{*})=E^{*}\}$ kümesine yakınsamaktadır. Bu küme $x(t,x_0,0)$ çözüm eğrisine ilişkin L_{+} pozitif limit kümedir. Tüm çözüm eğrileri için $E(x(t,x_0,0))$ E^{*} limit kümesine yakınsadığından, $\bar{x}\in L_{+}$ için $E(\bar{x})=E^{*}$ dir. L_{+} pozitif limit kümenin değişmez küme olması nedeniyle (Vidyasagar, 1978) her $\bar{x}\in L_{+}$ için $x(t,\bar{x},0)\in L_{+}$, bu da L_{+} limit kümesindeki her başlangıç koşulu için elde edilen çözüm eğrisi boyunca $E(x)$ fonksiyon değerinin sabit kaldığını göstermektedir. Başka bir deyişle $\frac{dE(x(t,\bar{x},0))}{dt^{+}}=0\quad \forall \bar{x}\in L_{+}$. Varsayım 1 gereği $x(t,x_0,0)$ çözüm eğrilerinin pözitif limit kümesi L_{+} denge noktalarından oluşmaktadır. Çözümlerin tekliğinden dolayı, her bir başlangıç koşulu için çözüm bir denge noktasında sonlanmaktadır.

Elde edilen bu sonuç, (3) ile tanımlı dinamik çözümleyicinin de gradyan sistemler gibi yakınsayan özellikte olduğunu göstermektedir.

Sonuç ve tartışma

Bu çalışmada doğrusal kısıtlı karesel amaç ölçütlü eniyileme problemler için gradyan temelli bir çözümleyici önerildi. La Salle'nin değişmez küme teoremi, sağ tarafı süreksiz sistemler için genişletilerek önerilen çözümleyicinin de gradyan sistemler gibi yakınsayan olduğu gösterildi. Önerilen çözümleyicinin doğrusal kısıtlı türetilebilir herhangi bir amaç ölçütlü eniyileme problemi için de çözümleyici olduğu gösterilebilir. Önerilen çözümleyicinin donanım olarak gerçeklenebilmesi halinde çözümler gerçek zamanda elde edilebilecektir.

Kaynaklar

Bouzerdoum, A. ve Pattison, T.R., (1993). Neural network for quadratic optimization with bound constraints, *IEEE Transactions on Neural Networks*, **4**, 2, 293-304, July.

Chua, L.O. ve Wang, N.N., (1978). Complete stability of autonomus reciprocal nonlinear networks, *Int. Journal of Circuit Theory and Applications*, **6**, 211-241.

Cichocki, A, ve Unbehauben, R., (1993). Neural networks for optimization and signal processing, John Wiley and Sons and B.G.Teubner, Stuttgart.

Hirsch, M.W. ve Smale, S., (1974). Differential equations, dynamical systems, and linear algebra, Akademic Press.

La Salle J.P., (1960). Some extensions of Liapunov's second method, *IRE Trans. Circuit Theory*, **CT-7**, 4, 520-527.

La Salle J.P., (1968). Stability theory for ordinary differantial equations, *Journal of Differential Equations*, **4**, 57-65.

Luenberger, D.G., (1973). Introduction to linear and nonlinear programming, Addison-Wesley Publishing Com.

Pekergin, F., Morgül, Ö. ve Güzeliş, C. (1999). A saturated linear dynamical network for approximating maximum clique, *IEEE Transactions on CAS Part-I*, **46**, 6, 677-685, June 1999.

Smith, K.A., (1999). Neural networks for combinatorial optimization: A review of more than a decade of research, *INFORMS Journal on Computing*, **11**, 1, 15-34, Winter.

Şengör, N.S., Çakır, Y., Güzeliş, C., Pekergin, F ve Morgül, (1999). An analysis of maximum clique formulations and saturated linear dynamical network, *ARI*, 51, 268-276, Springer-Verlag.

Vavasis, S.A., (1991). Nonlinear optimization, Oxford University Press, New York.

Vidyasagar, M., (1978). nonlinear systems analysis, Prentice Hall .

Zak, S.H., Upatising, V. and Hui, S., (1995). Solving linear programming problems with neural networks: A comparative study, *IEEE Transactions on Neural Networks*, **6**, 1, 94-103, January.