

Model derecesi düşürme tekniklerinin frekans ve zaman uzaylarında analizi

Yusuf CUNEDİOĞLU*, Ata MUĞAN

İTÜ Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 34437, Gümüşsuyu, İstanbul

Özet

Model derecesi düşürme teknikleri büyük boyutlu dinamik simülasyonlarda işlem zamanını azaltmak ve süper eleman yaratmak amacıyla kullanılmaktadır. Bu çalışmada, Sonlu Elemanlar Metodu (SEM) kullanılarak popüler model derecesi düşürme tekniklerinden "Component Mode Synthesis (CMS)", "Quasi-Static Mode Synthesis (QSM)", Doğrusal olmayan en küçük kareler metodu(DOEK) ve Alt uzay temelli "Subspace-Based" tanımlama (AUT) metotları frekans ve zaman uzayında yapısal bir problem üzerinde incelendi. DOEK metodu ile AUT metotlarının, CMS ve QSM metotlarından daha iyi sonuçlar verdiği, fakat model derecesi arttıkça DOEK metodunun yakınsamadığı ve AUT metodunun yüksek dereceden modeller uydurduğu görülmüştür. Çalışmanın ikinci bölümünde ayrık eşdeğerlik prensibine göre geliştirilen "Impulse Response Invariant (IRI)", İleri Farklar ve Newmark zaman entegrasyon metotları model derecesi düşürme tekniği olarak kullanıldı.

Anahtar Kelimeler: Sonlu elemanlar metodu, model derecesi düşürme teknikleri, sistem tanımlama metotları, yapısal analiz, ayrık eşdeğerlik.

Frequency and time domain analysis of model order reduction techniques

Abstract

Model order reduction techniques are commonly employed for dynamic simulation of large models and creating superelements. "Component Mode Synthesis", "Quasi-Static Mode Synthesis", nonlinear least squares and "Subspace-Based" identification methods are studied in time and frequency domains by using Finite Element Methods. In literature, phase errors of model order reduction techniques are commonly ignored, whereas it is an indication of performance of these methods and plays an important role in response of dynamical systems. It is observed that in general nonlinear least squares and "Subspace-Based" identification methods have better performance than "Component Mode Synthesis" and "Quasi-Static Mode Synthesis" methods; however, as the size of problems increases, the nonlinear least squares method may have convergence problems and "Subspace-Based" identification method may yield estimated models having large orders. Time response of the methods, in which convergence satisfied in frequency ranges, can not be able to fit with that of the exact system. Therefore, IRI, forward difference and Newmark time integration methods are developed on the base of discrete equivalent principle and used as a model order reduction techniques. Those methods can give good results when the active degrees-of-freedom are selected as the degrees-of-freedom to which forces and/or moments are applied.

Keywords: Finite element methods, model order reduction techniques, system identification methods, structural analysis, discrete equivalent.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Yusuf CUNEDİOĞLU. Cunedioğlu@itu.edu.tr; Tel: (212) 293 13 00 dahili: 2571.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Makina Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Yapıların dinamik indirgenmiş modellerinin ve süpereleman tekniklerinin frekans ve zaman uzaylarında analizi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 07.09.2005 tarihinde dergiye ulaşılmış, 12.10.2005 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.09.2006 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Analitik çözümlerin olmayışı nedeniyle, yapısal sistemlerin analizinde sayısal metotlar kullanılmaktadır. Bu sayısal metotlardan en yaygın olanı Sonlu Elemanlar Metodudur (SEM). Bu metot gereğince yapı elemanlara ayrıştırılır ve bu elemanların birbirleriyle düğüm noktaları vasıtasıyla bağlı oldukları farz edilir. Genel olarak, Sonlu eleman modelleri çok sayıda eleman ve düğüm kullanımını gerektirmektedir. Bu nedenle, özellikle dinamik analizlerde olmak üzere problem boyutlarını düşürmek için model derecesi düşürme teknikleri sık olarak kullanılır.

Model derecesini düşürme metotları özellikle son zamanlarda birçok çalışmanın konusu haline gelmiştir (Gu, 2000). Bu metotların birçoğu kütle ve katılık matris derecelerinin düşürülmesi vasıtasıyla SEM modelinin derecesini düşürmektedir. Bu tekniklerden bir kısmı fiziksel model koordinatlarının sayılarının doğrudan düşürülmesi esasına dayanır (Bouhaddi ve Fillod, 1992). İkinci bir diğer metot grubu ise, denklemlerin modlara ayrıştırılması esasına dayanan ve doğruluk derecesi daha iyi olan modal metotlardır (Maddox, 1975). Bununla birlikte modal metotların bazı dezavantajları da vardır. Mesela; analizlerde birden çok moda ihtiyaç duyulması halinde bu modların hesaplanma maliyeti yükselebilir. Metodun bu sakıncalarını ortadan kaldırmak için “Quasi–statik compensation” metodu geliştirilmiştir (Ma ve Hagivara, 1991). Üçüncü bir diğer grup ise Ritz vektör metodlarıdır (Gu, 2000).

Yukarıdaki bütün çalışmalarda model derecesi düşürme tekniklerinin performansı ya zaman uzayında ya da frekans uzayında genlik cevaplarıyla değerlendirilirler. Ancak literatürde bu metotların frekans uzayında faz açısı hatalarına dikkat edilmemiştir. Bununla birlikte, bu çalışmada gösterildiği gibi, frekans uzayında yaygın bir şekilde performans ölçümünde kullanılan genlik grafikleri yanıltıcı olabilir ve frekans uzayında faz açısı hataları zaman uzayında büyük hatalara neden olabilir. Bu gerçeklerden hareketle, bazı model derecesi düşürme teknikleri frekans ve zaman uzayında incelendi. DOEK ile AUT metotları model derecesi düşürme tekniği

olarak kullanıldı. Yakınsamanın sağlandığı frekans aralıklarında metotların zaman cevaplarının gerçek sistemin zaman cevabıyla uyumlayabileceği gerçeğinden hareketle ayrık eşdeğerlik prensibine göre geliştirilen “Impulse Response Invariant (IRI)”, İleri Farklar (İF) ve Newmark zaman entegrasyon metotları model derecesi düşürme tekniği olarak kullanıldı. Çalışmalarda, bir kafes sistemin dinamiği incelendi.

Model derecesi düşürme teknikleri

Sönümsüz halde yapısal bir bileşenin dinamik davranışı aşağıdaki denklemle ifade edilebilir.

$$M\ddot{u} + Ku = f \quad (1)$$

Burada, M ve K kütle ve katılık matrisleri \ddot{u} ve u sırasıyla ivme ve yer değiştirme vektörleri, f ise zamana bağımlı bir kuvvet vektörüdür. (1) denkleminde göre karakteristik denklem

$$(K - \omega_i^2 M)\Phi_i = 0 \quad (2)$$

şeklinde dir. Burada, ω_i^2 sistemin i .nci özdeğeri ve Φ_i sistemin özdeğerine karşılık gelen öz vektördür.

Component mode synthesis (CMS) metodu

CMS metodu Gu (2000)’de özetlendiği gibi yapısal dinamik analizlerde kullanılan super-elemanlar elde etmek için kullanılan bir model derecesi düşürme tekniğidir. Model derecesi düşürme işlemi, orijinal sistemin serbestlik derecesini ikiye bölmek suretiyle (1) denklemini aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ao} \\ M_{oa} & M_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_a \\ \ddot{u}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ao} \\ K_{oa} & K_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a \\ f_o \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Yapının her bir bileşeni için yer değiştirme vektörü aktif serbestlik derecesi u_a ve yok edilen serbestlik derecesi u_o vektörlerine bölünür. Daha sonra yapının her bir bileşeni aşağıdaki şekilde özdeğer problemiyle ilişkilendirilir.

$$\left(\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oa} \\ K_{ao} & K_{aa} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{oo} & M_{oa} \\ M_{ao} & M_{aa} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Phi_o \\ \Phi_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Burada (ω^2, Φ) sırasıyla özdeğer ve özvektörü temsil eder. Φ_n ise (4) No.lu denklemden elde edilen n .nci normal modu gösterir. Alt sistem fiziksel koordinatları u ile model derecesi düşürülmüş bileşen baz koordinatları z arasındaki koordinat dönüşümü aşağıdaki ifadeyle tanımlanır,

$$u = Tz \quad (5)$$

Burada T dönüşüm matrisi normal modlarından Φ_n seçilmiş bazı modlardan ve hesaplamalı mod olarak adlandırılan diğer bileşen Ritz birim Ψ vektörlerinden oluşur.

$$T = [\Psi \ \Phi_n] \quad (6)$$

Hesaplamalı modlar - Klasik Kısıtlı Modlar Gu (2000)'de tanımlandığı gibi statik cevap vektörü u 'nun alt bileşeni olan u_o 'ın u_a cinsinden ifade edilmesiyle elde edilir.

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oa} \\ K_{ao} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ u_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_a \end{Bmatrix} \quad (7)$$

(7) denklemi kullanılmak suretiyle, kısıtlı mod matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir (Gu, 2000).

$$\Psi_{CM} = \begin{bmatrix} \Psi_{oa} \\ \Psi_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{oo}^{-1}K_{oa} \\ I_{aa} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Burada, I_{aa} birim matrisidir.

Quasi-static mod (QSM) sentezi metodu

QSM metodu özellikle diğer metodlara göre üstün performansından dolayı bu çalışmada kullanıldı (Gu, 2000). Kısıtlı moda benzer şekilde "quasi-static" modlar, quasi-statik cevap vektörü u 'nun alt bileşeni olan u_o 'ın u_a cinsinden aşağıdaki quasi-statik model derecesi düşürme eşitliğinin ilk satırının çözülmesiyle elde edilir.

$$\left(\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oa} \\ K_{ao} & K_{aa} \end{bmatrix} - \omega_c^2 \begin{bmatrix} M_{oo} & M_{oa} \\ M_{ao} & M_{aa} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_o \\ u_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_a \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Burada ω_c merkezleme frekansı ve

$$u_o = -\left(K_{oo} - \omega_c^2 M_{oo}\right)^{-1} \left(K_{oa} - \omega_c^2 M_{oa}\right) u_a \quad (10)$$

(10) denklemi kullanılarak quasi-statik mod matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir (Gu, 2000).

$$\Psi_{QSM} = \begin{bmatrix} \Psi_{oa} \\ \Psi_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(K_{oo} - \omega_c^2 M_{oo}\right)^{-1} \left(K_{oa} - \omega_c^2 M_{oa}\right) \\ I_{aa} \end{bmatrix} \quad (11)$$

QSM Prosedürü - Bileşen normal modları ilk n tane normal moddan oluşur ve şu şekilde ifade edilir.

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} \Phi_{on} \\ \Phi_{an} \end{bmatrix} \quad (12)$$

QSM ve normal modları aşağıdaki dönüşümü verir (Gu, 2000).

$$u = \begin{Bmatrix} u_o \\ u_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{oa} & \Phi_{on} \\ \Psi_{aa} & \Phi_{an} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_a \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{oa} & \Phi_{on} \\ I_{aa} & \Phi_{an} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_a \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Burada q_a ve q_n sırasıyla QSM ve normal modlarla birleştirilen genelleştirilmiş koordinat vektörleridir. Elemanların birleştirilmesini basitleştirmek ve aktif koordinatların fiziksel anlamını korumak için (13) denklemi aşağıdaki gibi dönüştürülür.

$$u = \begin{Bmatrix} u_o \\ u_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{oa} & \Phi_{on} - \Psi_{oa} \Phi_{an} \\ I_{aa} & 0_{an} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Bu yüzden, dönüşüm matrisi T ve bileşen baz koordinatları z , Gu (2000)'de verildiği gibi,

$$T = \begin{bmatrix} \Psi_{oa} & \Phi_{on} - \Psi_{oa} \Phi_{an} \\ I_{aa} & 0_{an} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{oa} & \Gamma_{on} \\ I_{aa} & 0_{an} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$z = \begin{Bmatrix} u_a \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (16)$$

yazılır. Sonra model derecesi düşürülmüş elemanın katılık ve kütle matrisleri aşağıdaki ifadelerle tanımlanır;

$$K^r = T^T K T \quad (17)$$

$$M^r = T^T MT \quad (18)$$

Bu adımdan sonra, model derecesi düşürülmüş sistemin hareket denklemi aşağıdaki ifadeyle tayin edilir;

$$M^r \ddot{u} + K^r u = F \quad (19)$$

Bir sistemin frekans cevabı

Bir sistemin frekans cevabı karakteristiği Bode diyagramı olarak adlandırılan genlik-frekans ve faz açısı-frekans diyagramlarıyla temsil edilir. Yapısal bir sistemin hareket denklemi;

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F \quad (20)$$

şeklinde yazılabilir. Başlangıç şartlarının $u(0) = 0$ ve $\dot{u}(0) = 0$ kabul edilerek, (20) denkleminin Laplace dönüşümü alınarak transfer fonksiyonu yazılırsa

$$\frac{u(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (21)$$

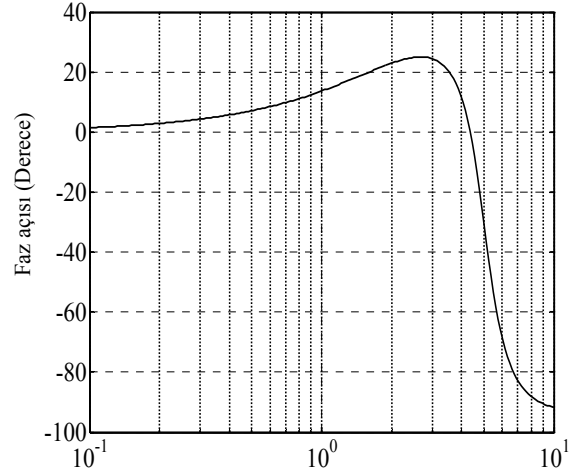
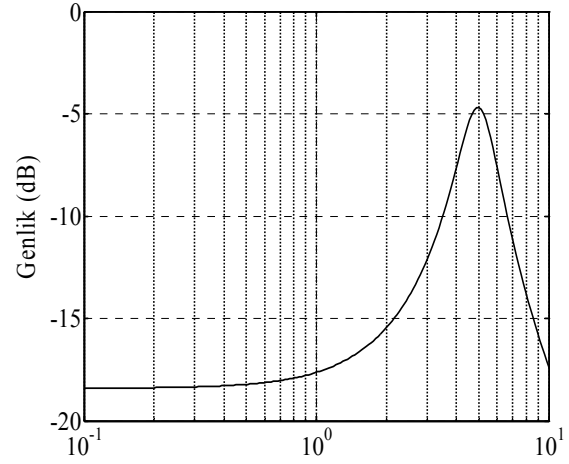
elde edilir. Burada ω_n sönümsüz halde doğal frekansı, ζ sönüm oranıdır. (21)'in frekans cevabı s yerine “j ω ” koymak suretiyle bulunabilir. Literatürde frekans uzayında model derecesi düşürme teknikleri incelendiğinde, bu metotların en az genlik hataları kadar önemli olan faz açısı hataları incelenmemiştir. Bu hususun önemini belirtmek açısından bir örnek verelim. G_1 ve G_2 ikinci dereceden bir sistemin transfer fonksiyonlarını gösterebilir;

$$G_1(s) = \frac{s+3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (22)$$

$$G_2(s) = \frac{s-3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (23)$$

Keyfi olarak $\zeta = 0.2$ ve $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$ parametreleri seçilerek, transfer fonksiyonların Bode diyagramları Şekil 1 ve 2’de verilmiştir. Genlik ve faz açıları büyüklükleri sırasıyla dB ve derece cinsindedir. Bu grafiklerden iki transfer fonksiyonun genlik cevaplarının aynı,

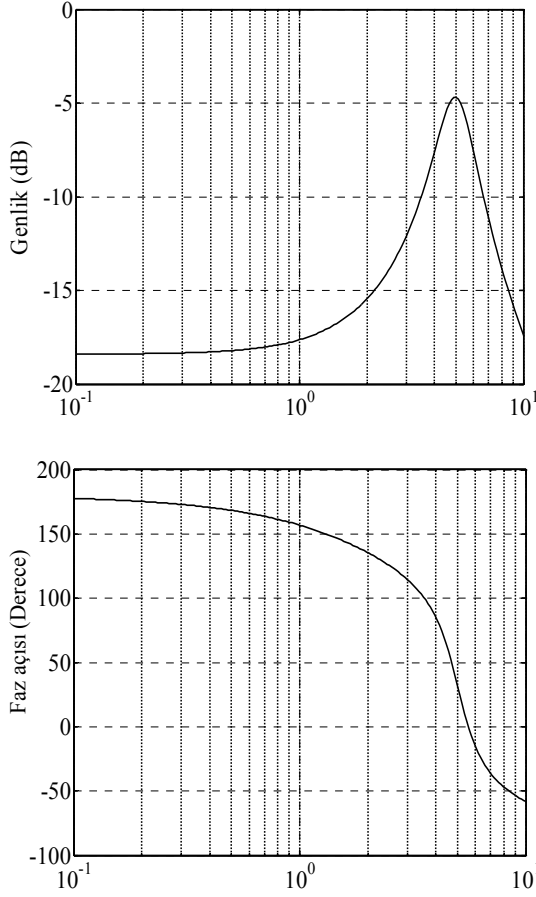
fakat faz açısı cevaplarının farklı olduğu görülmür. Bu transfer fonksiyonlarının zaman uzayındaki cevaplarında Bode faz açılarının etkilerini görmek için, bu sistemlerin zaman uzayında basamak cevapları Şekil 3’te verilmiştir. Bu sistemlerin zaman uzayında cevapları tamamen farklı olmalarına rağmen, Bode genlik diyagramlarının aynı olduğu gözlenmektedir.



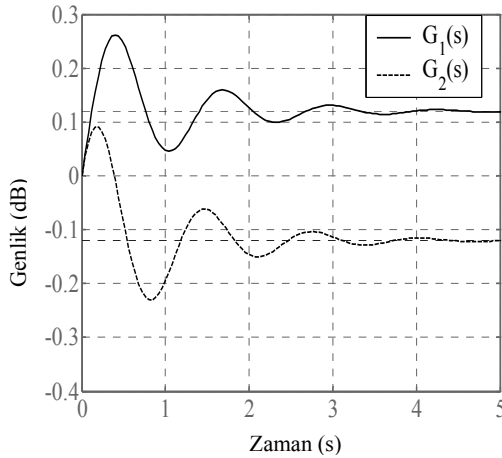
Şekil 1. $G_1(s)$ 'in Bode diyagramı

Doğrusal olmayan en küçük kareler (DOEK) metodu

Temelde doğrusal olmayan en küçük kareler metoduna dayanan Frekans Uzayı Tanımlama (FUT) algoritması, frekans uzayında sistemin model derecesini düşürmeye yönelik bir metottur (Schoukens ve Pintelon, 2001). (1) denklemi göz önünde bulundurularak, $G(s)$ giriş (kuvvet) ve çıkış (yer değiştirme) arasındaki ilişkiyi kuran



Şekil 2. $G_2(s)$ 'in Bode diyagramı



Şekil 3. $G_1(s)$ ve $G_2(s)$ 'nin basamak cevapları

ran sistemin transfer fonksiyonunu temsil eder. Burada, $s=j\omega$ kompleks Laplace dönüşüm değişkenidir. Doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemin sürekli-zaman transfer fonksiyonu aşağıda

gösterildiği üzere s cinsinden rasyonel bir fonksiyondur.

$$G_s(s) = \frac{num(s)}{den(s)} \quad (24)$$

Zamana göre değişen bir sinyalin $u(t)$ Laplace dönüşümü aşağıdaki verilen ifadeyle tanımlıdır.

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt \quad (25)$$

Bu durumda $G(s)$, girişin Laplace dönüşümü $F(s)$ ile çıkışın Laplace dönüşümü $D(s)$ arasındaki ilişkiyi tanımlar (Franklin vd., 1986). FUT problemi DOEK problemi olarak şu şekilde tanımlanır; $k=1,2,\dots,l$ için, ω_k frekansında kompleks giriş F_k ve kompleks çıkış D_k verilmiş ve $G(j\omega_k, P)$ transfer fonksiyonunun bulunması isteniyor olsun. En küçük kareler tipindeki aşağıdaki maliyet fonksiyonu minimize edilirse,

$$C_{LS} = \sum_{k=1}^l |F_k N^G(j\omega_k, P) - D_k D^G(j\omega_k, P)|^2 \quad (26)$$

bulunur. Burada, P bilinmeyen parametre vektörü, $N^G(j\omega_k, P)$ ve $D^G(j\omega_k, P)$ sırasıyla $G(j\omega_k, P)$ 'nin pay ve paydasıdır. Eğer $N^G(j\omega_k, P)$ ve $D^G(j\omega_k, P)$ sırasıyla orijinal modelin pay ve paydasına eşit ise $C_{LS}=0$. Bu çalışmada kullanılan algoritmada $N^G(j\omega_k, P)$ ve $D^G(j\omega_k, P)$ polinomlarının dereceleri deneme yanılma ile seçildi. Sonra Newton yöntemiyle $G_s(s, P)$ 'in parametre vektörü P 'yi değiştirmek suretiyle (26) minimize edilir (Schoukens ve Pintelon, 1991). $G_s(s, P)$ 'deki parametreler bir kere belirlendikten sonra, derecesi düşürülen modelin durum uzay denklemleri, kutuplar ve sıfırlar kullanılmak suretiyle elde edilir. Yani,

$$\dot{x} = Ax + Bf \quad (27)$$

$$q = Ex \quad (28)$$

Burada x yapının durum vektörüdür, A , B ve E matrisleri kanonik biçimindedir. Özetle, (27) ve (28) model derecesi düşürülmüş orijinal modeli,

(1), temsil eder. $N^G(j\omega_k, P)$ ve $D^G(j\omega_k, P)$ polinom dereceleri, bunlara karşılık gelen C_{LS} fonksiyonlarının değerleri ile kutuplar ve sıfırların konumları karşılaştırılarak belirlenir. Örneğin, $N^G(j\omega_k, P)$ ve $D^G(j\omega_k, P)$ polinomlarının derecesi yeteri kadar küçük bir C_{LS} değeri (10^{-3} - 10^{-5}) elde edilene kadar artırılır ve seçilen frekans aralığına bağlı olarak bu model derecesi seçilir.

Alt Uzay Tanımlama (AUT) metodu

Alt uzay tanımlama algoritması (McKelvey vd., 1996) bir transfer fonksiyonunun durum uzayı biçimindeki parametrelerinin tahmin edilmesinde kullanılmaktadır. Bu çalışmada, durum uzayı biçimindeki ayrık zaman sisteminin parametreleri tahmin edilerek yapısal sistemin düşürülmüş model derecesi elde edilmiştir. Daha sonra bu parametreler kullanılarak ayrık zaman sisteminin frekans ve zaman uzayı cevapları kolaylıkla elde edilebilir. Sisteme model derecesi uygulanırken ilgili frekans aralığı ve bu aralıkta istenen miktarda örnekleme frekans verisi oluşturulmuştur. Model derecesi adımı ve maksimum model derecesi kullanıcı tarafından girilerek algoritma örnekleme frekans verisini kullanmak suretiyle her bir model derecesi adımı için frekans cevapları oluşturmaktadır. Böylece gerçek sistem cevabı ile örtüşen frekans cevabı sistemin model derecesi olmaktadır. Algoritmanın ayrıntıları (McKelvey vd., 1996)'da verilmiştir.

Ayrık eşdeğerlik prensibiyle zaman entegrasyon metotlarının tasarımı

Ayrık eşdeğerlik prensibine (Muğan, 2003) göre aşağıda verilen iki sisteme ait ayrık eşitlikleri göz önünde bulunduralım;

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = f \quad (29)$$

$$\hat{M}\ddot{\hat{d}} + \hat{C}\dot{\hat{d}} + \hat{K}\hat{d} = \hat{f} \quad (30)$$

Burada (29) orijinal sistemi ve (30) model derecesi düşürme metotlarıyla elde edilen sistemi temsil eder. (29) ve (30) denklemleri ayrık eşdeğerlik prensibi gereğince bu sistemlerin bazı çıktıları ayrık zaman adımlarında birbirleriyle eşit oldukları farz edilsin. Yani ayrık zaman adımlarında $t=k\Delta t$,

$$\hat{d}_k = Ed_k \text{ ve } \hat{f}_k = Ef_k \quad (31)$$

olsun. Burada E dönüşüm matrisi olup

$$E = \begin{bmatrix} e_i^T \\ e_j^T \\ \vdots \\ e_k^T \end{bmatrix} \quad (32)$$

ile tanımlanmıştır. e_i ise i . elemanı 1 ve bunun dışındaki elemanları 0 olan birim vektördür;

$$e_i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (33)$$

Burada T transpozu temsil etmektedir. Böylece, (33)'deki e_i birim vektörlerine karşılık gelen (29) ve (30) denklemleriyle temsil edilen sistemlerin çıktıları ayrık zaman adımlarında birbirlerine eşittir.

Birinci dereceden sistemler- Aşağıdaki parabolik problemlerin yarı ayrık eşitliğini göz önünde bulunduralım,

$$M\dot{d} + Kd = f \quad (34)$$

Burada M kütle matrisi, K katılık matrisi, f yük vektörü, d yer değiştirme vektörü ve \dot{d} zamana göre d 'nin türevidir (Hughes, 1987). Yük vektörü f zamanın bir fonksiyonu olarak $t \in [0, T]$ için $f=f(t)$ ile belirtilmiştir. Daha sonra (34) denkleminin cevap envaryant zaman entegrasyon metotlarının elde edilmesinde göz önünde bulundurulacaktır.

Impulse Response Invariant (IRI) zaman entegrasyon metodu- İmpuls bir tepkiye karşı (34) denkleminin çözümü, ayrık zaman adımlarında (34) denkleminin kesin çözümüyle uyuşan bir zaman entegrasyon metodu tasarlamak istediğimizi farz edelim. Öncelikle, (34) No.lu denklemin tek serbestlik dereceli ifadesini basitleştirmek için aşağıdaki eşitlik göz önünde bulundurulur (Muğan ve Hulbert, 2001).

$$\dot{d} + \lambda d = f \quad (35)$$

Zaman integrasyon metodunun ayrık zaman çözümlerinin $f_d(k\Delta t) = Z^{-1}\{G_z(z)\}$ ifadesine eşit olduğu ve sürekli zamanda buna karşılık gelen yarı ayrık eşitliğin impuls cevabının $f_c(t) = L^{-1}\{G_s(s)\}$ ifadesine eşit olduğu görüldükten sonra $f_d(k\Delta t) = \Delta t f_c(t) |_{t=k\Delta t}$ eşitliği elde edilir.

$$G_z(z) = Z\{f_d(k\Delta t)\} = Z\{f_c(t)\Delta t\} = Z\{L^{-1}\{G_s(s)\}\Delta t \quad (36)$$

Burada, $G_s(s) = \frac{1}{s + \lambda}$ olarak verilmiş olup, (36) denklemi aşağıdaki ifadeye dönüşür;

$$G_z(z) = \frac{D_z(z)}{F_z(z)} = Z\{L^{-1}\left\{\frac{1}{s + \lambda}\right\}\Delta t = \frac{z}{z - e^{-\lambda\Delta t}} \Delta t \quad (37)$$

Burada, z zaman-adım değiştirme (time-step shift) operatörü olduğu için, $z^n d_k = d_{k+n}$ gibi bir ifadeye d_k k.nci zaman adımındaki (yani $t = k\Delta t$) çıkış değeridir. Bu nedenle (37) denklemi aşağıdaki ifadeye dönüşür.

$$d_{k+1} = e^{-\lambda\Delta t} d_k + \Delta t f_{k+1} \quad (38)$$

(38) denklemi birleştirilmemiş birinci dereceden eşitlikler için IRI zaman integrasyon metodunu temsil eder. Yarı ayrık eşitliği (34) için IRI zaman integrasyon metodunu elde etmek için, (34) denkleminin transfer fonksiyon matrisini $G_s(s)$ hesaplayalım. (34) denkleminin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınır aşağıda verilen ifade elde edilir;

$$G_s(s) = (sI + M^{-1}K)^{-1} M^{-1} \quad (39)$$

burada, I birim matrisidir. (37) ifadesine benzer şekilde aşağıdaki ifade elde edilir;

$$D_z(z) = G_z(z)F_z(z) = Z\{L^{-1}\{(sI + M^{-1}K)^{-1} M^{-1}\}\Delta t = \frac{z}{z - e^{-\Delta t M^{-1}K}} \Delta t M^{-1} \quad (40)$$

(40) denklemi, aşağıda verilen IRI zaman entegrasyon metodu denklemini verir.

$$d_{k+1} = e^{-\Delta t M^{-1}K} d_k + \Delta t M^{-1} f_{k+1} \quad (41)$$

Bu aşamada elde edilen (41) denkleminde model derecesi düşürme tekniği uygulanırsa, model derecesi düşürülmüş sistem için IRI zaman entegrasyon metodu ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{d}_{k+1} = e^{-\Delta t \hat{M}^{-1}\hat{K}} \hat{d}_k + \Delta t \hat{M}^{-1} \hat{f}_{k+1} \quad (42)$$

(31) ile tanımlanan (29) ile (30) arasındaki ilişki (42)'de yerine yazılırsa

$$E d_{k+1} = e^{-\Delta t \hat{M}^{-1}\hat{K}} E d_k + \Delta t \hat{M}^{-1} E f_{k+1} \quad (43)$$

denklemi elde edilir. (41) denklemi E ile çarpılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$E d_{k+1} = E e^{-\Delta t M^{-1}K} d_k + \Delta t E M^{-1} f_{k+1} \quad (44)$$

(43) ve (44)'te f_{k+1} terimlerinin eşitliğinden

$$\hat{M}^{-1} E = E M^{-1} \quad (45)$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra (45) ifadesi E^T ile sondan çarpılırsa

$$\hat{M} = (E M^{-1} E^T)^{-1} \quad (46)$$

ifadesi bulunur. Benzer işlemler d_k terimlerinin eşitliğine uygulanırsa;

$$\hat{K} = \frac{-\hat{M}}{\Delta t} \ln(E e^{-\Delta t M^{-1}K} E^T) \quad (47)$$

ifadesi elde edilir. (46) ile (47) denklemleri sırasıyla model derecesi düşürme tekniği olarak kullanılan IRI metodunun kütle ve katılık matrisleridir.

İkinci dereceden sistemler- Hiperbolik ve parabolik-hiperbolik problemlerin ikinci dereceden yarı ayrık eşitliğini göz önünde bulunduralım;

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = f \quad (48)$$

burada, yapısal mekanikte M kütle, C viskoz sönüm, K katılık matrisini, f uygulanan kuvvet vektörünü ve d , \dot{d} ve \ddot{d} sırasıyla yer değiştirme, hız ve ivme vektörlerini temsil etmektedir. Zaman integrasyon metotlarının ayırık zaman transfer fonksiyonları oluşturulurken Z dönüşümü ve ters Laplace dönüşümleri kullanıldığı için, bu metotların değerlendirilmesi sürekli zaman transfer fonksiyonunun paydasındaki köklere bağlıdır. Bu yüzden, (48) denklemi yeni değişkenler tanımlamak suretiyle (durum-uzay temsili kullanılarak) birinci dereceden sistemlere dönüştürülecektir (Franklin vd., 1986).

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} d(t) \\ v(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d(t) \\ v(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1}f(t) \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Burada, $v(t) = \dot{d}(t)$ hız vektörüdür.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$g(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1}f(t) \end{Bmatrix} \quad (51)$$

ve

$$w(t) = \begin{Bmatrix} d(t) \\ v(t) \end{Bmatrix} \quad (52)$$

ile tanımlanırsa, (49) denklemi aşağıdaki gibi birinci dereceden denkleme dönüşür.

$$\dot{w} + Aw = g \quad (53)$$

Böylelikle elde edilen (53) denklemi (34) denkleminin biçimine sahiptir. Genelde, yapısal dinamik problemlerin birinci dereceden problemlere dönüşümü yapıldıktan sonra çözümleri gerçekleştirilmektedir.

İleri Farklar (İF) metodu - İF metodu formülleri Hughes (1987) düzenlenirse,

$$\frac{M}{\Delta t^2} d_{n+2} + \left[\frac{C}{\Delta t} - \frac{2M}{\Delta t^2} \right] d_{n+1} + \left[\frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{\Delta t} + K \right] d_n = f_n \quad (54)$$

denklemi elde edilir. İRİ metodundaki gibi model derecesi düşürme metodolojisi uygulanırsa

$$\hat{M} = (EM^{-1}E^T)^{-1} \quad (55)$$

$$\hat{C} = \Delta t \left\{ \frac{2\hat{M}}{\Delta t^2} + \hat{M}EM^{-1} \left[\frac{C}{\Delta t} - \frac{2M}{\Delta t^2} \right] E^T \right\} \quad (56)$$

$$\hat{K} = \hat{M}EM^{-1} \left[\frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{\Delta t} + K \right] E^T - \frac{\hat{M}}{\Delta t^2} + \frac{\hat{C}}{\Delta t} \quad (57)$$

denklemleri elde edilir.

Newmark metodu - Newmark metodundaki ifadeler Hughes (1987) düzenlenirse

$$\left(M + \gamma\Delta t C + \beta\Delta t^2 K \right) a_{n+1} + \begin{pmatrix} \Delta t C - \gamma\Delta t C + \frac{\Delta t^2}{2} K \\ -\beta\Delta t^2 K \end{pmatrix} a_n \quad (58)$$

$$+ (C + \Delta t K)v_n + Kd_n = F_{n+1}$$

denklemi elde edilir. İRİ metodundaki gibi model derecesi düşürme metodolojisi uygulanırsa

$$\hat{K} = EKE^T \quad (59)$$

$$\hat{C} = E(C + \Delta t K)E^T - \Delta t \hat{K} \quad (60)$$

$$\hat{M} = -\gamma\Delta t \hat{C} - \beta\Delta t^2 \hat{K} + E(M + \gamma\Delta t C + \beta\Delta t^2 K)E^T \quad (61)$$

\hat{K} , \hat{C} ve \hat{M} denklemleri model derecesi düşürme tekniği olarak kullanılan İF ve Newmark metotlarının katılık, sönüm ve kütle matrisleridir.

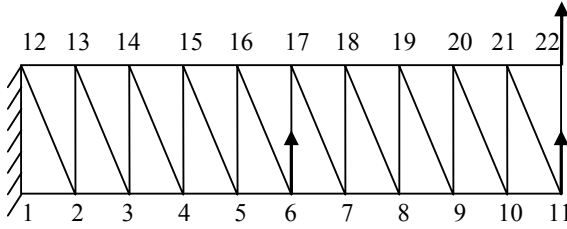
Uygulama

Bu bölümde, bir kafes kiriş sistemi göz önünde bulundurularak CMS, QSM, DOEK ve AUT gibi model derecesi düşürme teknikleri kullanılarak yapının frekans ve zaman uzayı cevapları incelendi. Bu metotların performansları Matlab'da geliştirilen programlar kullanılarak birbirleriyle karşılaştırıldı. CMS ve QSM metotlarının DOEK ve AUT metotlarıyla aynı zeminde karşılaştırmak için, aksi belirtilmedikçe CMS

ve QSM metotlarındaki mod sayısı AUT metoduyla tahmin edilen modelin derecesinin yarısı olarak seçilmiştir.

Frekans uzayı analizi

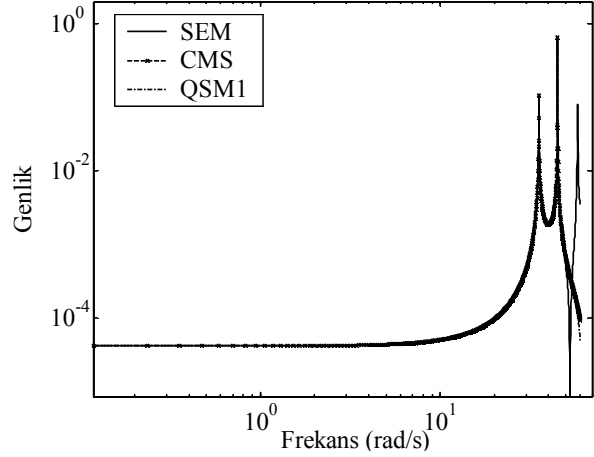
Kafes sistemin sırasıyla 40, 400 ve 1000 elemandan oluştuğu farz edilerek sonlu eleman simülasyonları yapılmıştır. Frekans uzayında tanımlama için örnekleme frekans sayıları 40, 400 ve 1000 eleman için sırasıyla 512, 1024 ve 2048 olarak seçilmiştir. Sonuçlar 40 elemanlı kafes sistemi için verilmiştir. Kafes sistemin 1 ve 12 nolu düğümlerden sabitlendiği ve sinüs kuvvetlerle düşey olarak 11 ve 22 nolu düğümlerden tahrik edildiği varsayılmıştır. Uygulanan kuvvet $f(t)=1000\sin\omega t$ [N] ile verilmiştir. Bu çalışmada; aktif serbestlik derecesi olarak 1, 6, 11, 12, ve 22 düğümlerinin düşey y-yönündeki yer değiştirmeleri seçilmiştir (Şekil 4).



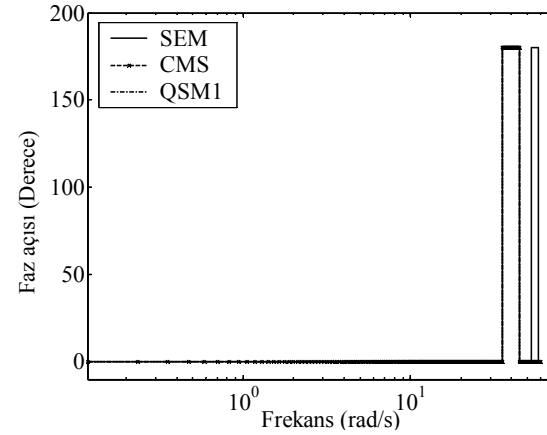
Şekil 4. 40 elemanlı kafes sistem

Sonlu eleman modellemesinde kafes sistem parametreleri; çubuk elemanın kesit alanı $h=1\text{ cm}^2$, elastisite modülü $E=2.10^7\text{ N/cm}^2$, yoğunluk $\rho=0.007850\text{ kg/cm}^3$, düşey ve yatay çubuk uzunlukları $l_1=100\text{ cm}$, köşegen çubuk uzunlukları $l_2=144\text{ cm}$ seçilmiştir. DOEK, CMS ve QSM1 metotları frekans-genlik, frekans-faz açısı ve frekans-faz açısı hatası karakteristikleri bakımından incelenmiştir. 6 No.lu düğümün düşey yer değiştirmesi için SEM, CMS ve QSM1 metotlarına ait frekans-genlik grafikleri 0-60 rad/s frekans aralığı için Şekil 5'te verilmiştir.

Burada model derecesinin düşürülmesinde kullanılan CMS ve QSM1 metotlarına ait mod sayısı 4 olarak alınmıştır. Buna karşılık gelen SEM, CMS ve QSM1 metotlarının frekans-faz açısı ve frekans-faz açısı hatası grafikleri sırasıyla Şekil 6 ve 7'de verilmiştir.



Şekil 5. SEM, CMS ve QSM1 metotlarının mod sayısının 4 olması halinde frekans genlik değişimi

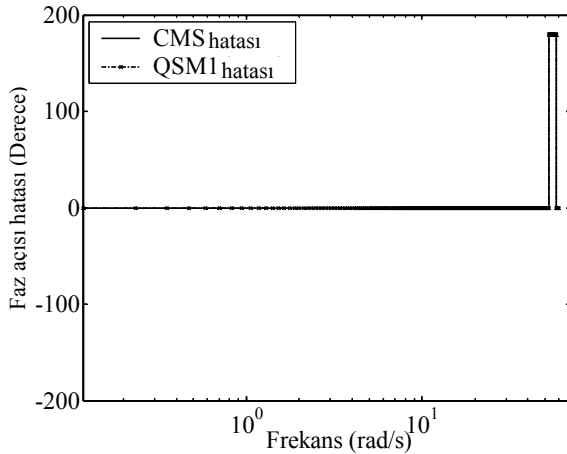


Şekil 6. SEM, CMS ve QSM1 metotlarının mod sayısının 4 olması halinde frekans faz açısı değişimi

Burada CMS ve QSM1 metotlarına ait değişimlerin birbirleriyle örtüştüğüne dikkat edilmelidir. Bu çalışmada merkezleme frekansı QSM1 için $\omega_{c1}=20\text{ rad/s}$, seçilmiştir. Sistemde sönüm olmadığından dolayı frekans-faz açısı değişimi Şekil 6'dan da görüldüğü gibi rezonans frekans değerlerinde puls şeklindedir. Şekil 5'ten görüleceği üzere CMS ve QSM1 metotlarının frekans-genlik değişimlerinin SEM'in frekans-genlik değişimiyle yüksek rezonans frekans değerlerinde örtüşmediği görülmüştür. Bu nedenle, bu rezonans frekans değerlerinde yüksek frekans-faz açısı hatası meydana gelmektedir.

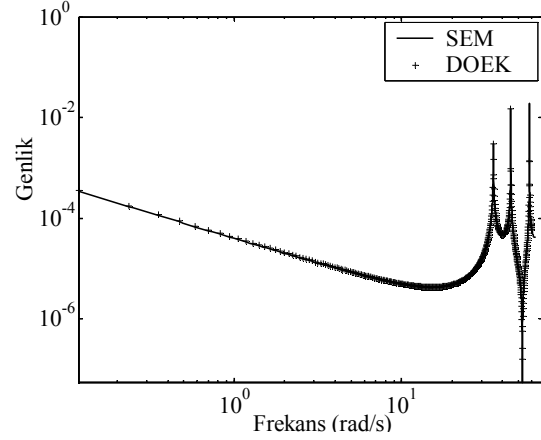
DOEK metodu kullanılmadan önce, (24) ile verilen sürekli sistemin transfer fonksiyonuna ait

pay ve paydanın dereceleri kullanıcı tarafından belirlendi. Pay ve payda derecelerinin seçimi ayrıntılı olarak Ljung (2000)'da verilmiştir. DOEK metodundaki pay ve paydaya benzer olarak, CMS metodunun T dönüşüm matrisindeki normal mod Φ_n sayısı da kullanıcı tarafından seçilir. Benzer şekilde QSM metotları için normal mod sayıları ve merkezleme frekansı değerlerinin seçimi kullanıcı tarafından belirlenir. 512 örnekleme frekans noktası alınarak, model derecesinin tahmininde kullanılan DOEK metodunun frekans aralıkları 0-60, 0-90, 0-120 ve 0-200 rad/s olarak değiştirildi ve tahmin edilen modeller incelenerek en uygun olanı belirlendi. 0-60 rad/s frekans aralığında en uygun model belirlendiğinde DOEK metoduyla tahmin edilen modele ait pay ve paydanın dereceleri sırasıyla 8 ve 9 olarak bulunmuştur. DOEK ve SEM modele ait frekans-genlik ve frekans-faz açısı hatası değişimleri sırasıyla Şekil 8 ve 9'da verilmiştir. Şekil 8'den de görüleceği üzere DOEK ve SEM çözümleri örtüşmektedir. Bu yüzden, frekans-faz açısı hatası değişimi yaklaşık sıfır mertebesindedir (Şekil 9).

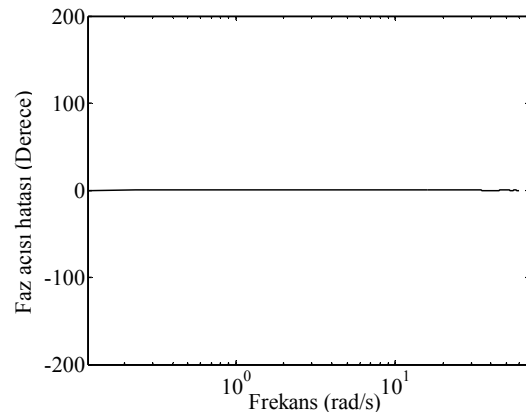


Şekil 7. CMS ve QSM1 metotlarının mod sayısının 4 olması halinde frekans faz açısı hatası değişimi

0-60 rad/s frekans aralığında DOEK, CMS ve QSM1 metotları için eşit sayıda mod kullanıldığında, DOEK metodunun faz açısı hatasının CMS ve QSM1 metotlarına nazaran çok daha az olduğu görülür. 0-60 rad/s frekans aralığında AUT metodu kullanıldığında en uygun model derecesi 16 olarak bulunmuştur (Şekil 10).



Şekil 8. SEM ve DOEK metotlarının mod sayısının 4 olması halinde frekans genlik değişimi



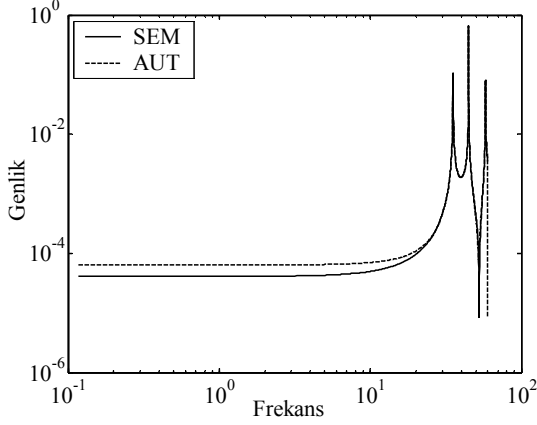
Şekil 9. DOEK metodunun mod sayısının 4 olması halinde frekans faz açısı hatası değişimi

Zaman uzayı analizi

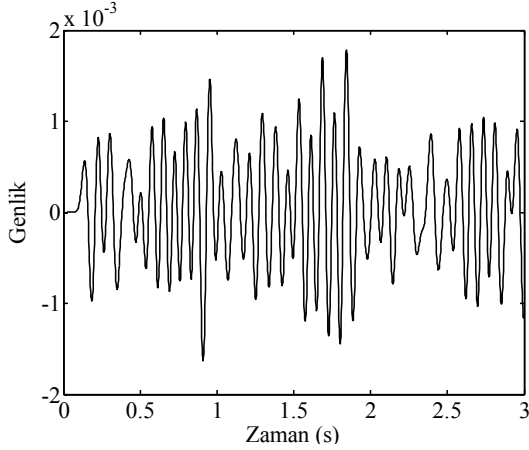
Hesaplamalarda $\beta = 0$ ve $\gamma = 0.5$ olarak seçilmiştir. Sayısal entegrasyonlarda zaman adımı $\Delta t = 0.002$ s olarak seçilmiş ve 40, 400 ve 1000 elemanlı modellerin zaman cevabı 0-3 s zaman aralığında hesaplanmıştır. 40 elemanlı model için sonuçlar verilecektir. Newmark metoduyla SEM modelin sönümsüz halde basamak cevabı Şekil 11'de verilmiştir.

CMS ve QSM1 metotlarının zaman cevaplarının mod sayılarının artırılmasıyla SEM modelin zaman cevabına yakınsadığı gözlemlendi. DOEK ve AUT metotlarının, yakınsamanın sağlandığı frekans aralıklarında zaman cevaplarının yakınsamadığı görüldü. Burada sadece AUT metodunun frekans ve zaman cevabı verilecektir. Sö-

nümsüz ($c=0$) halde 0 ile 120 rad/s frekans aralığında mod sayısı 32 için SEM ve AUT metotlarının frekans genlik değişimleri ve buna karşılık gelen zaman cevabı sırasıyla Şekil 12 ve 13'te verilmiştir.

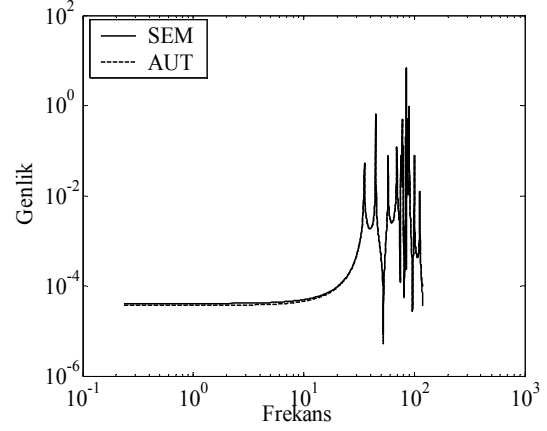


Şekil 10. SEM ve AUT metotlarının frekans genlik cevabı

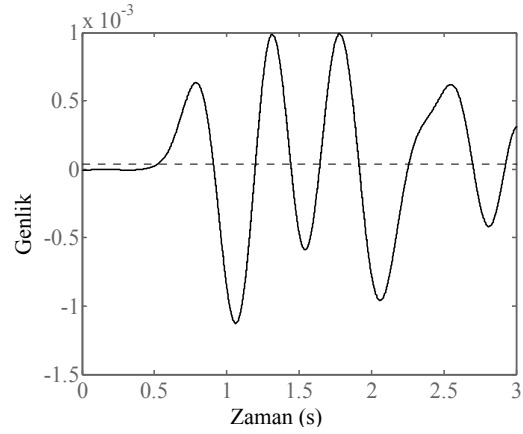


Şekil 11. SEM modelin basamak cevabı

Şekil 13'ten AUT metodunun basamak cevabının, Şekil 11'deki SEM modelin basamak cevabına yakınsamadığı görüldü. Bu nedenle, model derecesi düşürme tekniklerinin zaman cevabının sistemin gerçek (SEM) cevabıyla ayırık zaman adımlarında eşit olduğu varsayılarak İRİ, İF ve Newmark metotları model derecesi düşürme tekniği olarak kullanıldı. Uygulama olarak aynı kafes sistemi incelendi. Kuvvetin uygulandığı serbestlik derecesi çıktı ve $\Delta t = 0.001s$ alınarak analizler yapıldı.



Şekil 12. SEM ve AUT metotlarının frekans genlik değişimleri



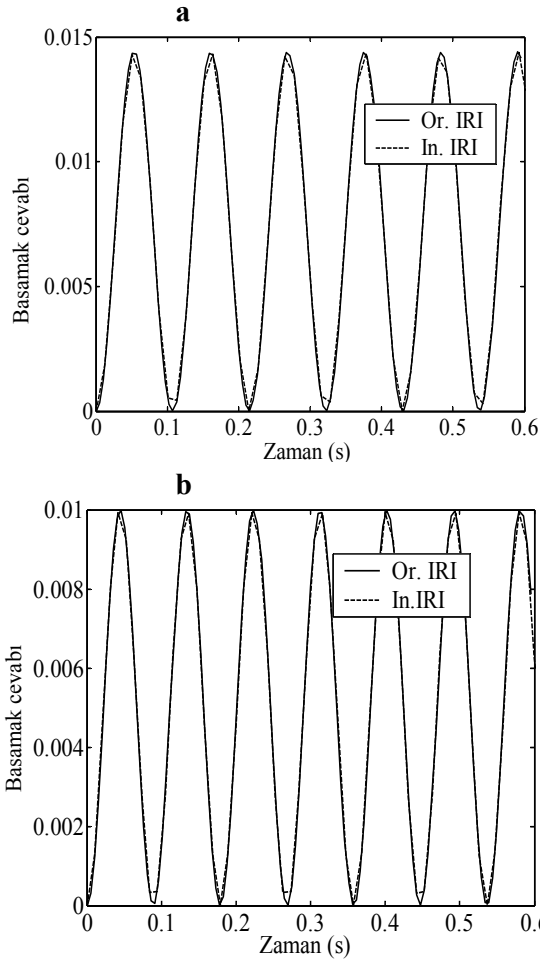
Şekil 13. AUT metodunun basamak cevabı

Tablo 1'den görüleceği gibi, eleman sayısının artırılmasıyla birlikte metotların CPU zamanlarının arttığı gözlemlenmiştir. Yine de tablo değerlerinden İRİ zaman entegrasyon metodunun model derecesinin İleri Farklar ve Newmark metotlarının iki katı kadar olduğu görülmüştür. İRİ zaman entegrasyon metodu ikinci dereceden sisteme dönüştürülürken matris boyutları iki katına çıktığından dolayı uygulanan kuvvetlerin serbestlik derecelerinin karşılıklarının da aktif hale getirilmesi gerekmektedir. Örneğin, 40 serbestlik dereceli sistemde kuvvetlerin uygulandığı 20 ve 40 No.lu serbestlik derecelerinin karşılıkları 60 ve 80 olmaktadır. Yine Tablo 1 değerlerinden görüleceği üzere, sönümlü ve sönümsüz halde bütün metotlar eleman sayısı ne olursa olsun aynı model derecesinde yakınsama ve yaklaşık olarak benzer karakteristikler sağla-

maktadırlar. Burada sönümsüz halde 40 ve 1000 elemanlı modeller için sadece İRİ metodunun basamak cevapları Şekil 14’de verilmiştir. Aynı şekilde sönüm katsayısının model derecesi üzerinde herhangi etkisinin olmadığı görülmüştür.

Tablo 1. 40, 400 ve 1000 serbestlik dereceli kafes sistemlerin model derecesi ve CPU süreleri

	C=0.001			C=0		
	İRİ	İF	NEW	İRİ	İF	NEW
ES	40	40	40	40	40	40
MD	4	2	2	4	2	2
CPU	0.265	0.078	0.078	0.25	0.062	0.0629
ES	400	400	400	400	400	400
MD	4	2	2	4	2	2
CPU	9.437	0.6719	0.469	9.109	0.6559	0.453
ES	1000	1000	1000	1000	1000	1000
MD	4	2	2	4	2	2
CPU	523.328	26.421	17.296	435.235	26.35	17.094



Şekil 14. (a) 40 elemanlı, (b) 1000 elemanlı orijinal kafes sistemin ve indirgenmiş sistem İRİ cevapları

Sonuçlar

Genellikle frekans uzayında DOEK metodu ile AUT metodlarının, CMS ve QSM metodlarından daha iyi sonuçlar verdiği, fakat model derecesi arttıkça DOEK metodunun yakınsamadığı ve AUT metodunun yüksek dereceden modeller uydurduğu görülmüştür (Cunedioğlu, 2005). CMS ve QSM1 metodlarının mod sayıları arttırıldığında zaman cevaplarının yakınsarken, DOEK ve AUT metodlarının yakınsamadığı görüldü. Sönüm katsayısının artmasıyla birlikte tahmin edilen model derecesinin düştüğü görüldü. Zaman entegrasyon metodlarında ise kuvvetlerin uygulandığı serbestlik dereceleri ve bunlara komşu olan diğer düğüm noktalarının serbestlik derecelerinin aktif hale getirilmesi ile yakınsamanın artacağı görüldü. Sönümlü ve sönümsüz halde sonlu eleman sayısı ne olursa olsun yakınsama aynı model derecesinde gerçekleşmektedir. Dolayısıyla daha düşük dereceli SEM modellerle çalışarak zaman kaybı önlenmiştir.

Kısaltmalar

Es :Eleman sayısı,
MD :Model derecesi,
NEW :Newmark,
OR :Orjinal,
İND :İndirgenmiş

Kaynaklar

- Bouhaddi, N. ve Fillod, R., (1992). Substructuring using a linearized dynamic condensation method, *Computers and Structures*, **45**, 679-683.
- Cunedioğlu, Y., (2005). Yapıların dinamik indirgenmiş modellerinin ve süpereleman tekniklerinin frekans ve zaman uzaylarında analizi, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. ve Emami-Naeini, A., (1986). *Feedback Control of Dynamic Systems*, 49-50, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- Gu, J., (2000). Efficient model reduction methods for structural dynamics analyses, *Doctoral Thesis*, The University of Michigan.
- Ma, Z. D. ve Hagiwara, I., (1991). Improved mode-superposition technique for modal frequency response analysis of coupled acoustic-structural systems, *AIAA Journal*, **29**, 1720-1726.
- Maddox, N. R., (1975). On the number of modes necessary for accurate response and resulting

- forces in dynamic analysis, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **42**, 516-517.
- McKelvey, T., Akçay, H. ve Ljung, L., (1996). Subspace-based multivariable system identification from frequency response data, *IEEE Trans. on Automatic Control* **41**, 960-979.
- Hughes, T. J. R., (1987). *The Finite Element Method*, 459-504, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Muğan, A., (2003). Discrete equivalent time integration methods for transient analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **57**, 2043-2075.
- Muğan, A, Hulbert G.M., (2001). Frequency domain analysis of time integration methods for semidiscrete finite element equations, Part I. Parabolic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **51**, 333-350.
- Schoukens, J. ve Pintelon, R., (2001). *System identification: A frequency domain approach*, 203-206, IEEE Press, New York.