itüdergisi/***d***
mühendislik
Cilt:5, Sayı:2, Kısım:2, 111-121
Nisan 2006

Silindirik bir tüpün ekseni boyunca düşen bir küre etrafında non-Newtonian akışkanların akımı

Şule CELASUN*, Yılmaz ÖZTÜRK
İTÜ Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 34437, Gümüşsuyu, İstanbul

Özet

Silindirik bir tüpün ekseni boyunca düşen bir küre etrafında non-Newtonian akışkanların akım modeli, küçük taneciklerin bir non-Newtonian akışkan ortamında çökelmesi probleminin akışkanlar mekaniği esaslarına göre simülasyonudur. Pratikte küçük taneciklerin çökelme oranının bilinmesi, gıda maddeleri, temizlik malzemeleri ve benzerlerinin raf ömrü bakımından özellikle anlamlıdır. Bu problem pratikte, kimyasal, genetik, biyomedikal ve diğer endüstriyel alanlardaki uygulamalarda önem taşımaktadır. Eldeki çalışmada bu problemi düzenleyen denklemler elde edilmek istenmiş ve polimerik akışkanların viskoelastik özelliklerine ait bazı önemli sonuçlar bulunmuştur.Gerçekten, polimerik akışkanlarda, normal gerilme katsayıları ile karakterize edilen elastik davranış, genelleştirilmiş Newtonian akışkana oranla normal gerilmelerde bir artış meydana getirmekte, kayma gerilmeleri ise azalmaktadır.
Anahtar Kelimeler: *Non-Newtonian, CEF denklemi, kayma-oranı, FEM.*

The flow of non-Newtonian fluids around a sphere falling along the centreline of a cylindrical tube

Abstract

We consider the settling of small particles in a non-Newtonian fluid medium. The simulation of this problem according to the fluid mechanics principles may be realized by the flow of a non-Newtonian fluid around a sphere falling along the centreline of a cylindrical tube. The knowledge of rate of settling of particles in practice is particularly significant in determining the shelflife of materials such as foodstuffs, cleaning materials and many others. Thus, this problem has great importance in many natural and physical processes and in a large number of industrial applications such as chemical, genetic and biomedical engineering operations. In this study we tried to determine the equations governing this process and we drew some important conclusions about the properties of polymeric liquids related to their viscoelastic constitution. Effectively we found that, for polymeric liquids, the elastic behaviour characterized by the normal stress coefficients, implies relatively increased normal stresses with respect to the generalized Newtonian fluids, whereas the shear stresses tend to decrease, thus changing somewhat the category of the flow from shear-flow into elongational flow in a small rate. Hence, the viscoelastic property of the polymeric liquids must be stressed by their constitutive equation choice, which led us to the CEF model.
Keywords: *Non-Newtonian, CEF equation, shear-strain rate, FEM.*

---

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Şule CELASUN. celasuns@itu.edu.tr; Tel: (212) 240 69 95.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Makina Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Sınırlı bir geometriyi dolduran non-Newtonian bir akışkan içindeki bir kürenin dönel simetrik ve daimi hareketinin incelenmesi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 18.03.2005 tarihinde dergiye ulaşmış, 06.09.2005 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.09.2006 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Küçük taneciklerin bir non-Newtonian akışkan ortamında çökelmesi, silindrik bir tübün ekseni boyunca düşen bir küre etrafında non-Newtonian akışkanların akımı şeklinde modellenmiştir. (Celasun ve Öztürk, 2001) (Şekil 1). Non-Newtonian akışkan olarak CEF modeli seçilmiştir. Bunun bünye denklemi şöyledir:

$$\tau = -p\,\boldsymbol{I} + \eta\,\boldsymbol{A_1} + (\upsilon_1+\upsilon_2)\,\boldsymbol{A_1^2} - \frac{1}{2}\upsilon_1\,\boldsymbol{A}_2 \qquad (1)$$

υ_1 ve υ_2 içeren son iki terim, normal gerilmelere bağlı elastik etkileri belirtir. Tanner (1988) CEF denklemindeki Rivlin-Ericksen tansörleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A_1} &= 2\boldsymbol{d} = \nabla\boldsymbol{V} + \nabla\boldsymbol{V}^T \\ \boldsymbol{A_1^2} &= 4\boldsymbol{d}^2 \\ \boldsymbol{A_2} &= \nabla\boldsymbol{a} + \nabla\boldsymbol{a}^T + 2\,\nabla\boldsymbol{V}\,\nabla\boldsymbol{V}^T \end{aligned} \qquad (2)$$

$\boldsymbol{d}$ nin 1.invaryantı sıfırdır (Bird vd., 1987) (Eringen, 1967).

$$I_d = 0 \qquad (3)$$

2. invaryant II_d cinsinden kayma-oranı şöyledir:

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{II_d} = \sqrt{\frac{1}{2} tr\,\boldsymbol{A}_1^2} = \sqrt{\frac{1}{2} tr\,\boldsymbol{A}_2} \qquad (4)$$

(1) ifadesinde görülen $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_1^{\boldsymbol{2}}$, $\boldsymbol{A}_2$ hız gradyentleri hesaplanmıştır. Normal gerilme katsayıları şunlardır:

$$N_1 = \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} = \upsilon_1(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2$$

$$N_2 = \tau_{\theta\theta} - \tau_{zz} = \upsilon_2(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2$$

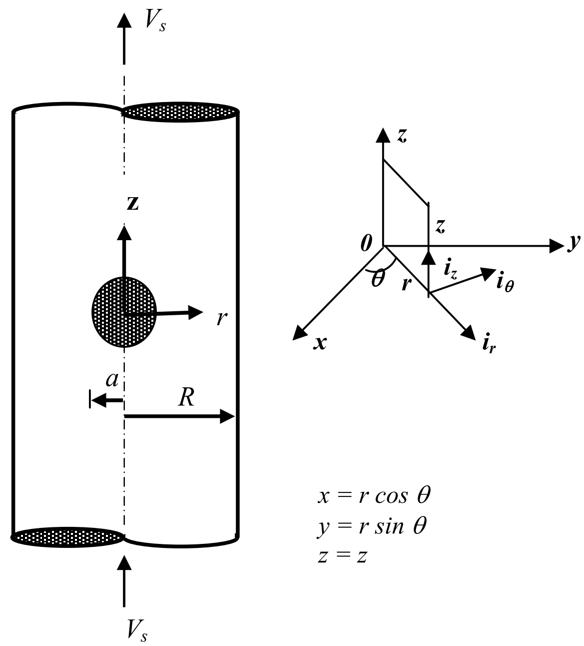
Viskozite katsayısı için Carreau formülü seçilmiştir (Bird vd., 1987).

$$\eta = \eta_o(1 + 32.32\ tr\ A_1^2)^{-0.318} \qquad (5)$$

υ_1 için en küçük kareler metodu yardımıyla:

$$\frac{\upsilon_1}{\eta} = 10^{\left[-0.169(\log_{10}\dot{\gamma})^2 - 0.76\log_{10}\dot{\gamma} - 0.821\right]} \qquad (6)$$

elde edilir (Barnes vd., 1989). Genelde υ_2= -0.15υ_1 ve $\upsilon_1+\upsilon_2$=0.85 υ_1 alınabilir (Bird vd., 1987).



Şekil 1. Bir silindirdeki akışkan içine düşen bir kürenin şeması

CEF akışkanı uygulaması

η ve υ_1 maddesel fonksiyonlarının türevleri hesaplanmıştır. 2. invaryant ve türevleri, hız gradyentleri cinsinden tansör bileşenleri ve tansör bileşenlerinin türevleri de hesaplanmıştır.

Ayrıca, V_s, η_o, υ_{10} ve υ_{20} kullanılarak boyutsuzlaştırma yapılmıştır (Celasun ve Öztürk, 2002).

Akım daimi, eksenel simetrik, sıkıştırılamaz ve irrotasyonel varsayıldığından

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial\theta} = 0 \qquad \nabla.\boldsymbol{V} = 0 \qquad v_\theta = 0 \qquad (7)$$

yazılmıştır.

Boyutsuz ana denklemlerin açık ifadeleri

Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0 \tag{8}$$

Hareket denkleminin r ekseni üzerine izdüşümü:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial \eta}{\partial r}(A_1)_{rr}+\frac{\partial \eta}{\partial z}(A_1)_{zr}+\\
&+\eta\left[\frac{\partial (A_1)_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial (A_1)_{zr}}{\partial z}+\frac{(A_1)_{rr}-(A_1)_{\theta\theta}}{r}\right]+\\
&+0.85K\left\{\frac{\partial \upsilon_1}{\partial r}(A_1^2)_{rr}+\frac{\partial \upsilon_1}{\partial z}(A_1^2)_{zr}+\right.\\
&\left.+\upsilon_1\left[\frac{\partial (A_1^2)_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial (A_1^2)_{zr}}{\partial z}+\frac{(A_1^2)_{rr}-(A_1^2)_{\theta\theta}}{r}\right]\right\}-
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}K\left\{\frac{\partial \upsilon_1}{\partial r}(A_2)_{rr}+\frac{\partial \upsilon_1}{\partial z}(A_2)_{zr}+\right.\\
&\left.+\upsilon_1\left[\frac{\partial (A_2)_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial (A_2)_{zr}}{\partial z}+\frac{(A_2)_{rr}-(A_2)_{\theta\theta}}{r}\right]\right\}=0
\end{aligned}$$

Hareket denkleminin z ekseni üzerine izdüşümü:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \eta}{\partial r}(A_1)_{rz}+\frac{\partial \eta}{\partial z}(A_1)_{zz}+\\
&+\eta\left[\frac{\partial (A_1)_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial (A_1)_{zz}}{\partial z}+\frac{(A_1)_{rz}}{r}\right]+\\
&+0.85K\left\{\frac{\partial \upsilon_1}{\partial r}(A_1^2)_{rz}+\frac{\partial \upsilon_1}{\partial z}(A_1^2)_{zz}+\right.\\
&\left.+\upsilon_1\left[\frac{\partial (A_1^2)_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial (A_1^2)_{zz}}{\partial z}+\frac{(A_1^2)_{rz}}{r}\right]\right\}-\\
&-\frac{1}{2}K\left\{\frac{\partial \upsilon_1}{\partial r}(A_2)_{rz}+\frac{\partial \upsilon_1}{\partial z}(A_2)_{zz}+\right.\\
&\left.+\upsilon_1\left[\frac{\partial (A_2)_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial (A_2)_{zz}}{\partial z}+\frac{(A_2)_{rz}}{r}\right]\right\}=0
\end{aligned} \tag{10}$$

burada K normalizasyon sayısı olup 0.32'ye eşit alınacaktır (Yuan, 1969).

Akım fonksiyonu

$$\psi = \text{sabit } -\int_0^r r v_z\, dr \approx \pi-\int_0^r r v_z\, dr \tag{11}$$

Boyutsuz sınır şartları

Akımın girişinde $v_r = 0$ $v_z = 1$

Silindirik tüp boyunca (r=R) $v_r = 0$ $v_z = 1$

Silindirik tübün ekseni boyunca (r=0) $v_r = 0$ $\left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=0}=0$

Küre yüzeyi üzerinde $v_r = v_z = 0$

Akımın çıkışında $v_r = 0$ $\frac{\partial v_z}{\partial r}=0$

p =0 (atmosfer basıncı)

Boyutsuz gerilme bileşenleri

$$K=\frac{\upsilon_{10}}{\eta_0}\frac{V_s}{a}$$

$$\tau_{rr}=-p+\eta(A_1)_{rr}+K\left[0.85\,\upsilon_1(A_1^2)_{rr}-\frac{1}{2}\upsilon_1(A_2)_{rr}\right]$$

$$\tau_{rz}=\eta(A_1)_{rz}+K\left[0.85\upsilon_1(A_1^2)_{rz}-\frac{1}{2}\upsilon_1(A_2)_{rz}\right]$$

$$\tau_{\theta\theta}=-p+\eta(A_1)_{\theta\theta}+K\left[0.85\upsilon_1(A_1^2)_{\theta\theta}-\frac{1}{2}\upsilon_1(A_2)_{\theta\theta}\right]$$

$$\tau_{zz}=-p+\eta(A_1)_{zz}+K\left[0.85\upsilon_1(A_1^2)_{zz}-\frac{1}{2}\upsilon_1(A_2)_{zz}\right]$$

Direnç kuvveti (drag) ve katsayısı

$$D=2\pi\int_0^{\pi}\left[\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\sin\varphi+\left(-p+2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\cos\varphi\right]\sin\varphi\, d\varphi$$

$C = D / D_\infty$

$D_\infty = 6\pi\eta_{av}$ (Stokes formülü)

Sonlu elemanlar metodunun uygulanması

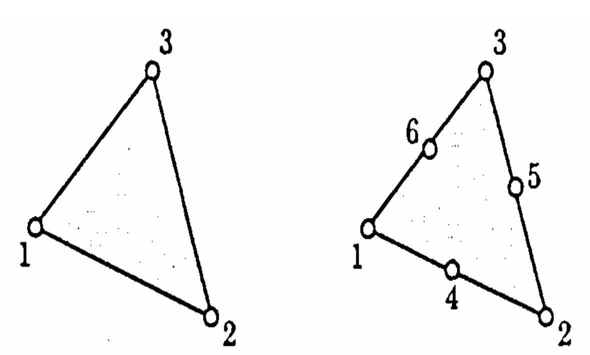
Bilindiği gibi amaç, değişkenlere ait kısmi diferansiyel denklemi, genelde, sabit düğüm noktalarındaki değişkenler cinsinden bir nonlineer simültane denklem takımına dönüştürmektir (Zienkiewicz, 1978). Primitif değişkenler olarak v_r, v_z hız bileşenleri ve p basıncı seçilmiştir. Bütün gerilme değişkenleri, hızlar ve basınçlar cinsinden ifade edilmiş ve v_r, v_z hızları ile p basıncı bulunduktan sonra gerilmeler geriye dönerek hesaplanmıştır. Üçgen elemanlar kullanılmış ve stabilite gereği, basınç alanı hız terimlerinden bir derece daha düşük bir polinom ile interpole edilmiştir. Böylece eleman üzerinde, lineer basınç ve kuadratik hız alanları seçilmiş olmaktadır.

Lineer ve kuadratik üçgenler

İnterpolasyon fonksiyonu için, her ikisi de alan koordinatları ile işlem yapılan, hızlar için üçü tepe noktalarında ve diğer üçü kenar ortalarında olmak üzere altı düğüm noktalı bir kuadratik üçgen ve basınçlar için lineer bir üçgen alınarak serendipiti türü şekil fonksiyonları kullanılmıştır (Şekil 3). Bu şekil fonksiyonları üç tepe ve üç kenar ortası düğüm noktaları (1,2,...,6) ya karşı gelmek üzere sırasıyla

$L_1(2L_1\text{-}1)$; $L_2\,(2L_2\text{-}1)$; $L_3\,(2L_3\text{-}1)$;
$4L_1L_2$;$4L_2L_3$; $4L_3L_1$ dir;

basınçlar için ise 1,2,3 düğüm noktaları şekil fonksiyonları L_1, L_2, L_3 tür.



Şekil 2. (a) Bir lineer üçgen eleman
(b) Bir kuadratik üçgen eleman

Global koordinatlara göre şekil fonksiyonlarının türevleri şöyledir:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i^e}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i^e}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial L_2} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

burada Jacobian dönüşüm matrisi

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial L_1} & \dfrac{\partial z}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial r}{\partial L_2} & \dfrac{\partial z}{\partial L_2} \end{vmatrix}$$

ile gösterilir (Reddy ve Gartling, 2001). Eleman alanı şudur:

$$drdz = \frac{1}{2}\det J dL_1 dL_2 \tag{13}$$

Üçgen eleman üzerinde nümerik integrasyon bakımından integraller aşağıdaki gibi dönüştürülmüştür:

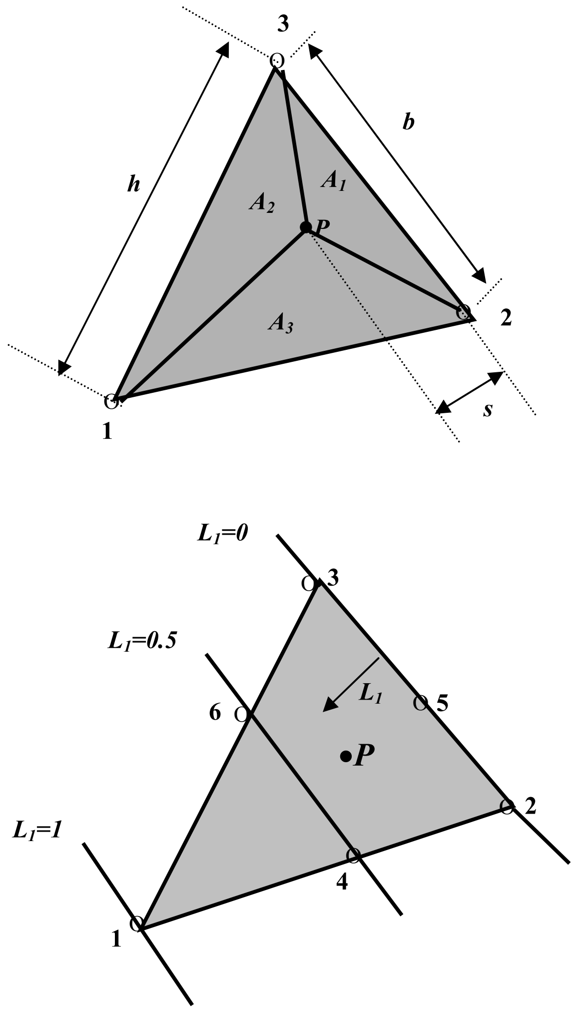
$$\iint_{\Omega^e} F(r,z)drdz = \iint_{\Omega^e} F(L_1,L_2,L_3)dL_1dL_2 \tag{14}$$

bunlar Gauss kuadratür formülü ile gerçekleştirilebilir:

$$\iint_{\Omega^e} F(L_1,L_2,L_3)dL_1dL_2 \approx \sum_{I=1}^{3} F(S_I)W_I \tag{15}$$

burada W_I ve S_I Tablo 1'de gösterildiği gibi, kuadratür kuralının ağırlıkları ve integrasyon noktalarıdır.

Integrasyon, eksenel simetri geometrisi $rdrd\theta dz$ elemanter hacmi üzerinde yürütülmelidir. Çözüm θ koordinatından bağımsız olduğundan θ'ya göre integrasyon 2π gibi bir çarpan sabiti verir.



Şekil 3. Alan koordinatları (Reddy ve Gartling, 2001)

İnterpolasyon fonksiyonları

$L_1 + L_2 + L_3 = 1$ sınırlamasına dayanarak, basitlik için L_3 bağımlı değişkeni elimine edilmiş ve şunlar bulunmuştur:

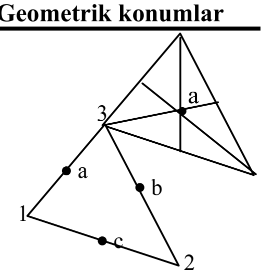
$$
\begin{aligned}
v_r &= (-L_1 + 2L_1^2)v_{r1} + (-L_2 + 2L_2^2)v_{r2} + \\
&\quad (1 - 3L_1 - 3L_2 + 2L_1^2 + 4L_1L_2 + 2L_2^2)v_{r3} \\
&\quad + 4L_1L_2v_{r4} + 4(L_2 - L_1L_2 - L_2^2)v_{r5} + 4 \\
&\quad (L_1 - L_1L_2 - L_1^2)v_{r6} \\
v_z &= (-L_1 + 2L_1^2)v_{z1} + (-L_2 + 2L_2^2)v_{z2} + \\
&\quad (1 - 3L_1 - 3L_2 + 2L_1^2 + 4L_1L_2 + 2L_2^2)v_{z3} + \\
&\quad + 4L_1L_2v_{z4} + 4(L_2 - L_1L_2 - L_2^2)v_{z5} + 4 \\
&\quad (L_1 - L_1L_2 - L_1^2)v_{z6} \\
p &= L_1(p_1 - p_3) + L_2(p_2 - p_3) + p_3
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Lokal koordinatlara göre türevler ve global koordinatlara göre türevler hesaplanmıştır.

Nümerik uygulamada izlenen yol ve elde edilen değerler

Akım alanını örten lineer ve kuadratik üçgenlerden oluşan ağ örnekleri kabul edilen a/R=0.2 değeri için Şekil 4'te gösterilmiştir (Rameshwaran vd., 1998). Akım olayını daha yakından kavramak için, en büyük aktivitenin yer aldığı durma noktaları ve küre yüzeyi civarında ağ konfigürasyonu çok sıkı alınmış ve uzaklaştıkça seyrekleştirilmiştir. Tam gelişmiş giriş ve çıkış akımları elde etmek ve uç etkilerinden kaçınmak için, kaynak ve kuyu silindir boylarının her biri *20a* ya eşit seçilmiştir. Süreklilik denklemi, hız bileşenleri arasında ilave bir bağıntı olarak yorumlandığından, yani, yaklaşık bir en küçük kareler anlamında yerine getirilen bir kısıt gibi görüldüğünden (Reddy ve Gartling, 2001) denklemler ve bilinmeyen değişkenler sayısı arasında denge sağlamak için, kenar ortası noktaları etrafındaki efektif alan hesabında gözardı edilmiştir.

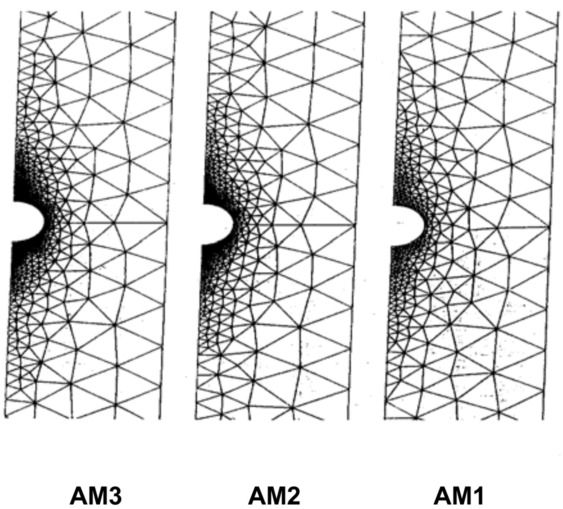
Tablo 1. Üçgen elemanlar için kuadratür ağırlıkları ve noktalar

Integrasyon noktaları sayısı	Polinom derecesi Rezidü mertebesi	Integrasyon noktaları yeri					
		L_1	L_2	L_3	W	Geometrik konumlar	
1 (Basınçlar)	1 $O(h^2)$	1/3	1/3	1/3	1	a	
3 (Hızlar)	2 $O(h^3)$	1/2	0	1/2		a	
		0	1/2	1/2	1/3	b	
		1/2	1/2	0		c	

Sınır şartları da gözönünde tutularak ve her düğüm noktası etrafında Gauss kuadratürü ile efektif alan üzerinde nümerik olarak integre edilerek (Celasun ve Öztürk, 2001) elde edilen global denklem sistemi çözülmek suretiyle değişkenlerin değerleri bulunmuştur (Zienkiewicz ve Taylor, 1994).

Nümerik uygulama detayları Hesaplar işlemci hızı 1.7 GHz ve hafızası (RAM) 512 MB olan bir Pentium-4 PC üzerinde gerçekleştirilmiştir. Çözümde FEM metodu kullanılmıştır. Nümerik çözüm için MATLAB 6.5 kullanılmış ve hazır MATLAB fonksiyonları ile tarafımızca yazılmış fonksiyonlar devreye sokulmuştur. Toplam 1715 denklem kullanılmıştır.

Tepe noktaları ve kenar ortası noktaların toplam sayısı 755'tir.



Şekil 4. Küre etrafında adaptif düzensiz ağlar (a/R=0.2)

Genelde max iterasyon sayısı 100 alınmıştır. Simültane denklem takımı çok sayıda ve yüksek derecede nonlineer ve üstelik sınır şartları sebebiyle "overdetermined" denklem içerdiğinden, alan koordinatları ve Gauss kuadratürü kullanarak ve nodlar etrafındaki efektif alan üzerinde integre ederek bulunan bu sistemin çözümünde, genellikten fedakarlık etmeden, optimizasyon teknikleri kullanılmış (MATLAB Optimset f-solve fonksiyonu) ve hata mertebeleri, standard sapma, Öklidyen ve Sonsuz normlar hesaplanarak, histogram çizilmek suretiyle sonuçlar kontrol edilmiş ve iyi bir yaklaşıklık sağlanmaya çalışılmıştır.

Bunların ardından, ekstrem kontur düzeyleri (Tablo 2); hata hesabı (Tablo 3); histogram sonuçları (Tablo 4); Öklidyen ve Sonsuz normlar (Tablo 5) verilmiştir.

Tablo 2. Ekstrem kontur düzeyleri

Akım	Min	Max
ψ	0.0000	3.1416
v_r	-0.1772	0.2183
v_z	0.0000	1.0215
p	-3.4962	5.9995
τ_{rr}	-6.0019	3.3792
τ_{zz}	-6.1339	3.7165
$\tau_{\theta\theta}$	-6.0115	3.4000
τ_{rz}	-0.3701	0.8390
η	0.0845	1.0000
υ_l	0.0029	0.9981

Tablo 3. Hata hesabı, standart sapma, küre üzerindeki η değerlerinin ortalaması (η_avg) ve drag katsayısı (C)

Ortalama hata	0.1004
Standart Sapma	0.1820
η_avg	0.1104
C	1.6502

Tablo 4. Denklem hatalarına ait histogram sonuçları. Toplam 1715 denklem kullanılmıştır

Hata aralıkları	0-0.5	0.5-1.0	1.0-1.5	1.5-2.0	2.0-2.5
Denklem sayısı	1637	66	11	1	0
Yüzdesi (%)	95.4519	3.8484	0.6414	0.0583	0

Tablo 5. Minimize edilen denklem vektörü F'nin minimum ve maksimum değerleri ile öklidyen ve sonsuz normları

Min., Max. ve Normlar:	Min(F)	Max(F)	$\|F\|_2$	$\|F\|_\infty$
	-1.3449	1.6251	8.6075	1.6251

Konturlar Akım fonksiyonu Ψ, radyal hız v_r, eksenel hız v_z, basınç p, normal gerilmeler τ_{rr}, τ_{zz}, $\tau_{\theta\theta}$, kayma gerilmesi τ_{rz}, viskozite katsayısı η, normal gerilme katsayısı υ_1, hata histogram konturları verilmiştir.

Sonuçlar

Viskozite katsayısı η ve normal gerilme katsayıları υ_1 ($\upsilon_2 \approx -0.15\ \upsilon_1$) gözönüne alındığı zaman:

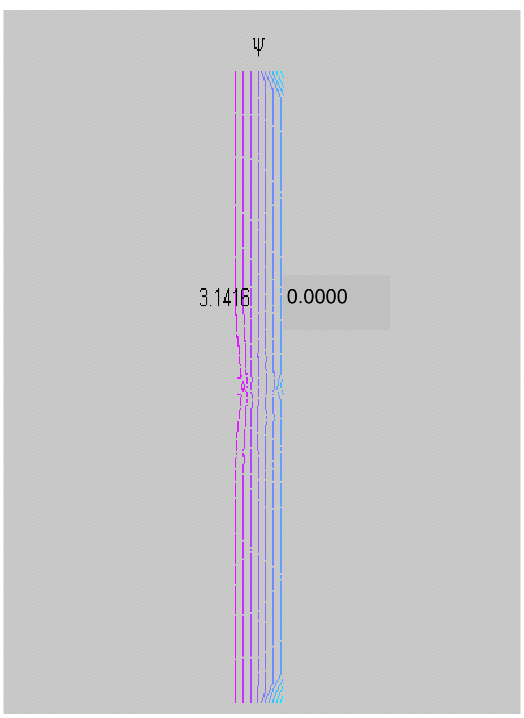
$\eta = 0$, $\upsilon_1=0$ Euler akışkanı

$\eta =$ sabit, $\upsilon_1=0$ 1.mertebe (Newtonian) akışkan (inelastik)

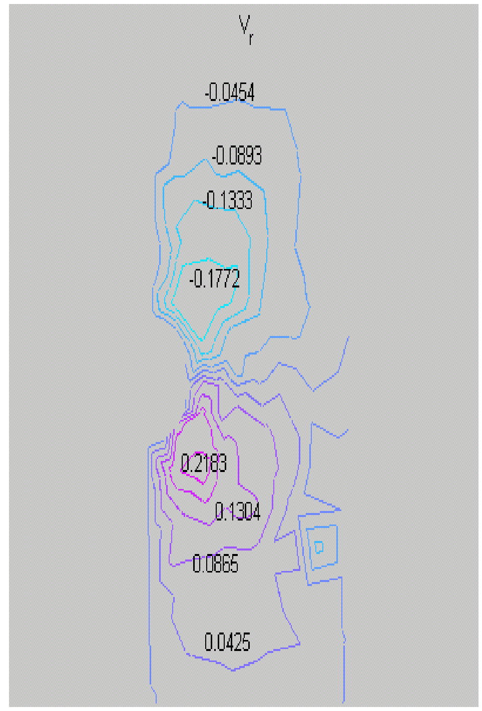
$\eta=$değişken ($\dot{\gamma}$ fonksiyonu), $\upsilon_1=0$ Genelleştirilmiş Newtonian akışkan

$\eta =$ sabit, $\upsilon_1=$sabit 2.mertebe non-Newtonian akışkan (viskoelastik); örnek (Rivlin-Ericksen akışkanı)

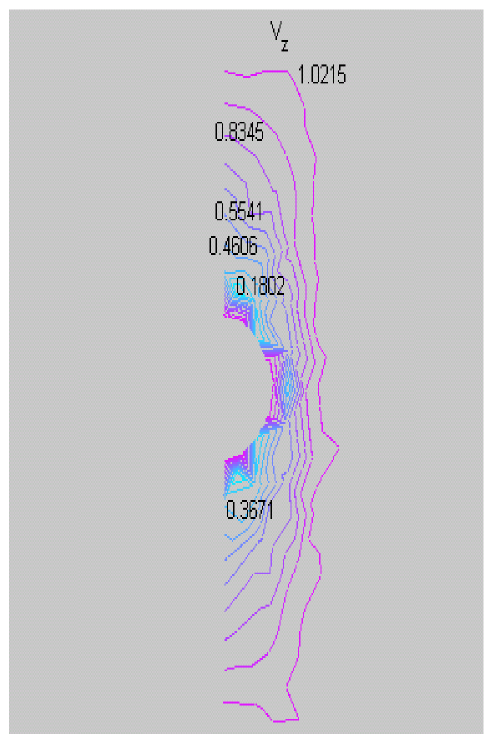
$\eta=$değişken, $\upsilon_1=$değişken CEF akışkanı olarak tanımlanabilir.



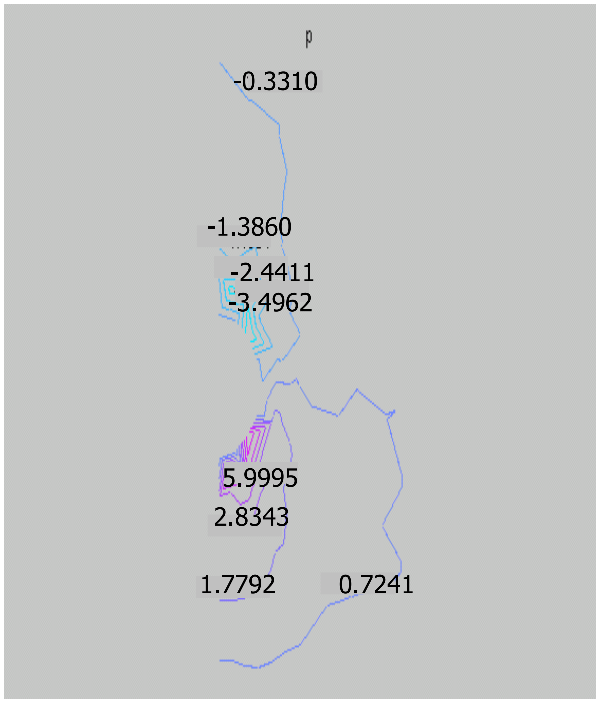
Şekil 5. Akım fonksiyonu (Ψ)
[0.00 0.01 0.05 0.20 0.44 0.77 1.25 1.88 2.67 3.14]



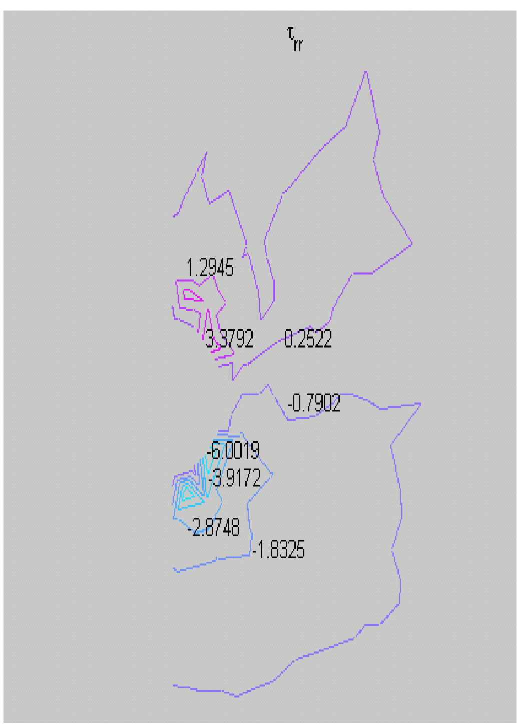
Şekil 6. Radyal Hız (v_r)
[-0.1772 –0.1333 –0.0893 –0.0454 –0.0014 0.0425 0.0865 0.1304 0.1743 0.2183]



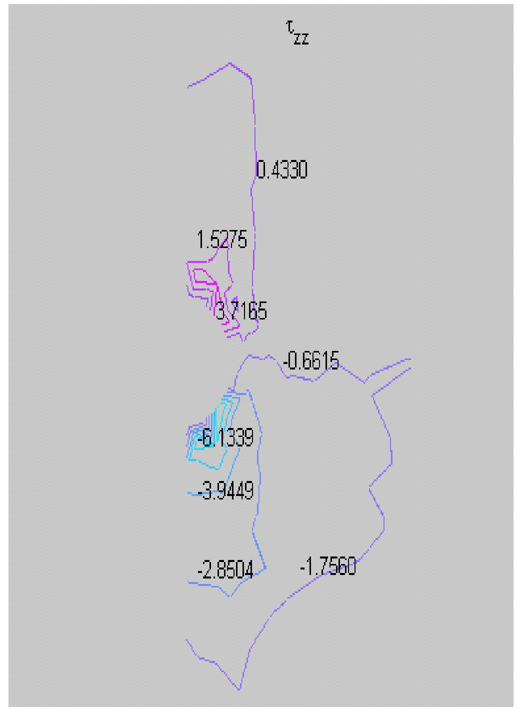
Şekil 7. Eksenel hız (v_z)
[0.000 0.1802 0.2737 0.3671 0.4606 0.5541 0.6476 0.7411 0.8345 0.9280 1.0215]



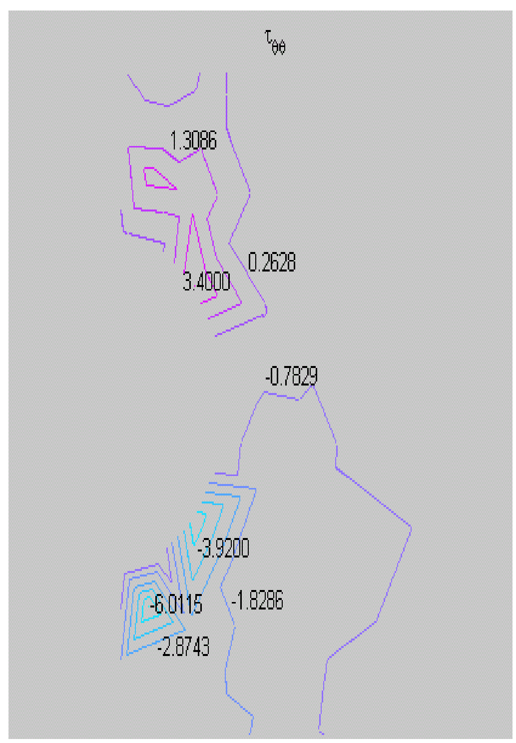
Şekil 8. Basınç (p)
[-3.4962 –2.4411 –1.3860 –0.3310 0.7241 1.7792 2.8343 3.8893 4.9444 5.9995]



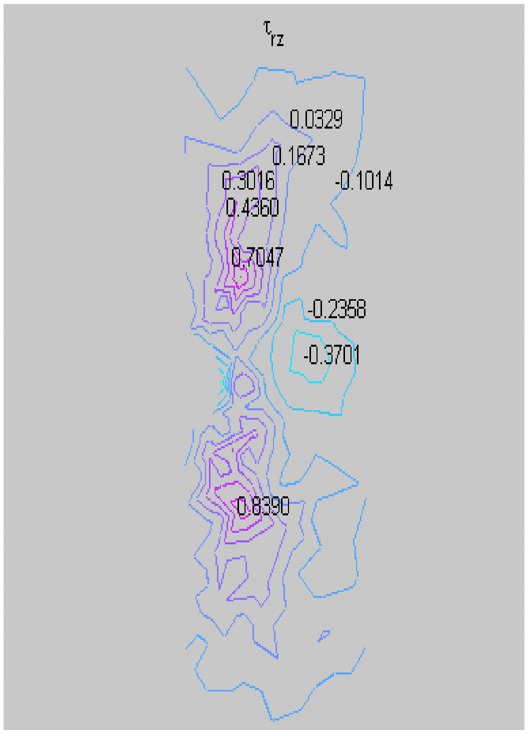
Şekil 9. Normal gerilme (τ_{rr})
[-6.0019 –4.9595 –3.9172 –2.8748 –1.8325 –0.7902 0.2522 1.2945 2.3369 3.3792]



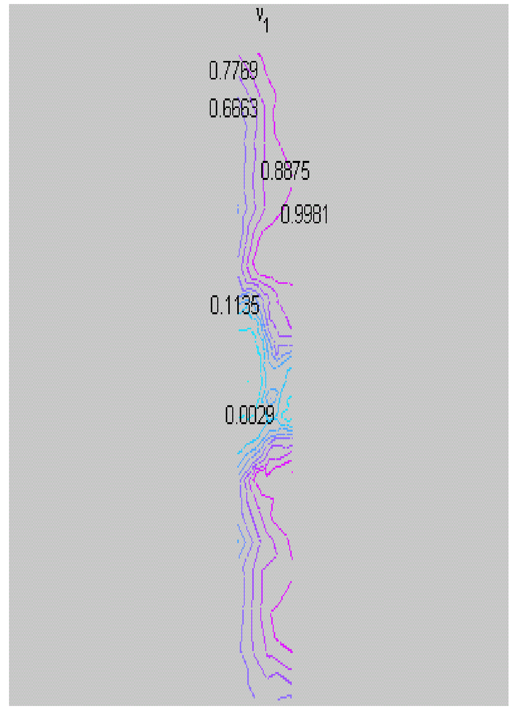
Şekil 10. Eksenel gerilme (τ_{zz})
[-6.1339 –5.0394 –3.9449 –2.8504 –1.7560 –0.6615 0.4330 1.5275 2.6220 3.7165]



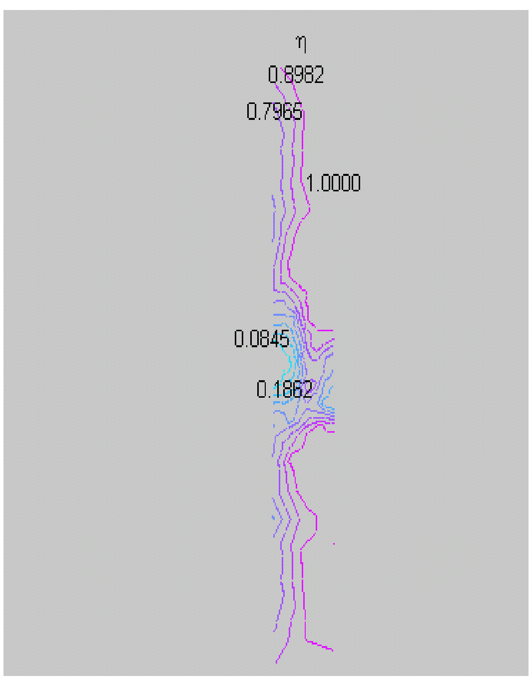
Şekil 11. Dönel gerilme ($\tau_{\theta\theta}$)
[-6.0015 –4.9658 –3.9200 –2.8743 –1.8286 –0.7829 0.2628 1.3086 2.3543 3.4000]



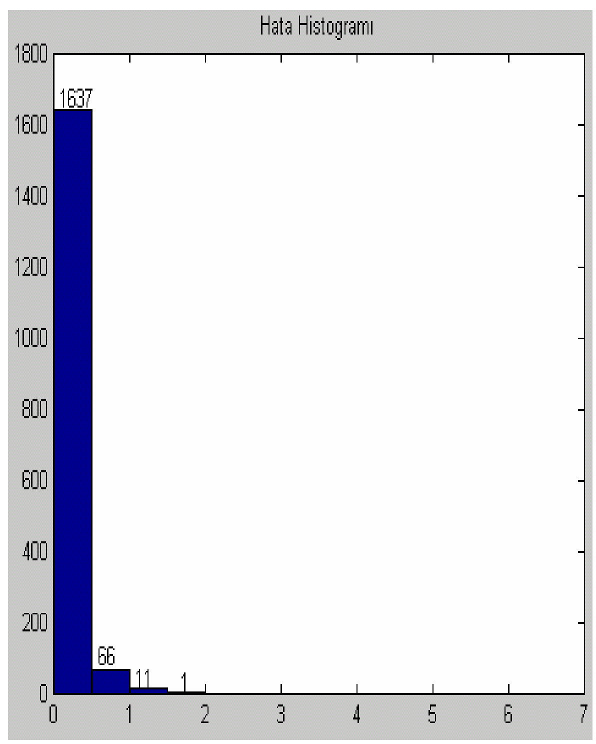
Şekil 12. Kayma gerilmesi (τ_{rz})
[-0.3701 –0.2358 –0.1014 0.0329 0.1673 0.3016 0.4360 0.5703 0.7047 0.8390]



Şekil 14. Normal gerilme katsayısı (ν_1)
[0.0029 0.1135 0.2241 0.3346 0.4452 0.5558 0.6663 0.7769 0.8875 0.9981]



Şekil 13. Viskozite katsayısı (η)
[0.0845 0.1862 0.2879 0.3896 0.4914 0.5931 0,6948 0.7965 0.8982 1.000]



Şekil 15. Hata üreten denklem sayıları düşey eksende gösterilmiştir

Bu akışkanların bünye denklemleri çeşitli şekillerde (diferansiyel, integral) hafızasız, hafızalı tarzında verilerek birçok akışkan tipi belirlenmiştir. Bunların hiçbiri bütün akım tarzları için tatmin edici sonuçlar vermez. Ele aldığımız "Bir akışkan ortamı içinde küçük taneciklerin çökelmesi" problemine analitik çözümler getirmek, birkaç basit örnek dışında, genellikle başarısız kalmıştır. Bulunan analitik çözümler (pertürbas-yon metodları) kalitatif olarak nisbeten iyi sonuçlar vermişlerse de, güvenilir kantitatif değerlere ulaşamamışlardır. Bu yüzden FEM, BEM gibi nümerik metodlara başvurmak zorunlu olmuştur. Literatüre bakıldığında, ele aldığımız konu için geliştirilen bir etüdde, genelleştirilmiş Newtonian akışkan gözönüne alınmış, FEM uygulanmış, fakat nümerik güçlükler sebebiyle, matrisler kullanılırken "weak form" v.s. gibi basitleştirici yollara başvurulmuştur (Rameshwaran vd., 1998). Direkt ve doğal çözüm yöntemleri kullanılamadığı gibi, bu problemin geçerli olduğu pratik uygulamalarda karşılaşılan polimerik akışkanların inelastik değil viskoelastik olduğu gerçeği de gözardı edilmiştir. O halde υ normal gerilme katsayılarını işe dahil eden bünye denklemleri kullanmak gerekmektedir. Bu çalışmamızda, uygulanması matematik olarak nisbeten kolay ve pratikte deney sonuçlarına oldukça yakın değerler verebilen CEF akışkanını kullandık. Bu akışkan "Convected Maxwell", "Oldroyd" v.s. gibi modellere nazaran hafıza bakımından dezavantajlı olmasına karşın, yukarıda belirtilen üstünlüklere sahiptir.

Çözüm sürecinde koordinat dönüşümlerindeki Jacobian'ler özellikle büyük güçlük çıkardılar ve iteratif çözüm sürelerini çok uzattılar. Bunlara karşı bazı önlemler almak zorunluğu doğdu.

Sonuçların literatürle karşılaştırılması

Bu karşılaştırma bulduğumuz konturlar ve ekstrem değerler, genelleştirilmiş Newtonian akışkanla kıyaslanarak yapılmıştır (Şekil 5 ila 15) (Rameshwaran vd., 1998). Bunların incelenmesinde görülen şudur:

- Her iki tipte konturlar birbiriyle uyumludur.
- Akım çizgileri Ψ, hızlar v_r, v_z ve viskozite η için farklar azdır.
- Elastik davranışı simgeleyen normal gerilmeler τ_{rr}, $\tau_{\theta\theta}$, τ_{zz} de önemli farklar görülmektedir. Normal gerilmelerin şiddeti ve genliği (Tablo 6) dan görüleceği gibi, viskoelastik tipte çok artmıştır.
- Kayma gerilmesi τ_{rz} ise azalmıştır.

Bu tablo polimerik akışkanlarda elastik etkinin ihmal edilemeyeceğini göstermektedir. Normal gerilme katsayısı υ nün işe dahil edilmesiyle normal gerilmelerin artışı ve fakat kayma gerilmesinin azalışı, akımın kategorisinde, kayma akımından (shear flow), uzama akımına (elongational flow) doğru bir yönelme olduğunu ortaya koymaktadır. Böylece bir gerçek vurgulanmış ve akışkan literatüründeki önemli bir noktaya açıklık getirilmiş bulunmaktadır (Celasun ve Öztürk, 2002) (Öztürk, 1975) (Celasun ve Öztürk, 2003) (Celasun ve Öztürk, 2004).

Tablo 6. Gerilmelerin karşılaştırılması

Gerilmeler	τ_{rr}		$\tau_{\theta\theta}$		τ_{zz}		τ_{rz}	
	min	max	min	max	min	max	min	max
İnelastik	-2.6545	3.1418	-1.4139	1.8356	-3.6693	2.8291	-1.3276	2.9703
Viskoelastik	-6.0019	3.3792	-6.0115	3.400	-6.1339	3.7165	-0.3701	0.8390

Semboller

a	: *Küre yarıçapı / İvme*
A_1, A_1^2, A_2	: *Rivlin – Ericksen tansörleri*
C	: *Direnç katsayısı*
d	: *Deformasyon oranı tansörü*
D	: *Sınırlı ortamda direnç kuvveti*
D_∞	: *Sınırsız ortamda direnç kuveti*
I	: *Birim tansör*
L_1, L_2, L_3	: *Yersel alan koordinatları*
n	: *Üstel – kanun katsayısı*
N_1, N_2	: *Normal gerilme farkları*
p	: *Basınç*
R	: *Silindir yarıçapı*
r, θ, z	: *Global silindirik koordinatlar*
t	: *Zaman*
v	: *Hız*
V_s	: *Küre hızı*
η	: *Viskozite katsayısı*
η_0	: *Sıfır kayma oranı için viskozite katsayısı*
$\dot{\gamma}$	: *Kayma oranı*
υ_1, υ_2	: *Normal gerilme katsayıları*
υ_{10}, υ_{20}	: *Sıfır kayma oranı için normal gerilme katsayıları*
τ	: *Gerilme tansörü*

Kaynaklar

Barnes, H.A., Hutton, J.F. ve Walters, K., (1989). *An introduction to rheology,* Elsevier, New York.

Bird, R.B., Armstrong, R.C. ve Hassager, O., (1987). *Dynamics of polymeric liquids,* **1**, Fluid Mechanics, John Wiley.

Celasun, Ş., (2000). Thermoviscoelastic approach to the creep phenomenon of the concrete, *Mechanics of Time Dependent Materials,* Proceedings of the 3rd International Conference, September 17-20, Erlangen, Germany.

Celasun, Ş., Öztürk, Y., (2001). Küçük taneciklerin bir non-Newtonian akışkan ortamında çökelmesi, *TUMTMK XII. Ulusal Mekanik Kongresi,* 10–14 Eylül, Selçuk Üniversitesi, Konya.

Celasun, Ş., Öztürk, Y., (2002). CEF model in the industrial application of non-Newtonian fluids, *Parallel CFD 2002 Conference*, May 20-22, Kyoto, Japan.

Celasun, Ş., Öztürk, Y., (2003). An example to the numerical processing of nonisothermal flow of non-Newtonian fluids, *Parallel CFD 2003 Conference,* May 13-15, Moscow, Russia.

Celasun, Ş., Öztürk, Y., (2004). Three-dimensional lubrication theory in viscoelastic short-bearing, *Parallel CFD 2004 Conference*, May 24-27, Las Palmas, Gran Canaria, Spain.

Eringen, A.C., (1967). *Mechanics of Continua*, John Wiley.

Öztürk, Y., (1975). Rivlin-Ericksen akışkanının aynı eksenli gözenekli dönen iki silindir arasındaki daimi ve dönel hareketine ait sahih çözüm*, Doktora Tezi*, İTÜ Makina Fakültesi, İstanbul.

Rameshwaran, P., Townsend, P. ve Webster, M.F., (1998). Simulation of particle settling in rotating and non-rotating flows of non-Newtonian fluids, *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* **26,** 851-874.

Reddy, J.N., Gartling, D.K., (2001). *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics* (Second Edition), CRC Press, New York.

Tanner, R.I., (1988). *Engineering rheology,* Clarendon Press, Oxford.

Yuan, S.W., (1969). *Foundations of fluid mechanics*, Prentice – Hall, New Delhi, India.

Zienkiewicz, O.C., (1978). *The finite element method*, Mc Graw–Hill.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., (1994). *The finite element method* (Fourth Edition), **1**, Mc Graw-Hill,London.