

EAR model yaklaşımını kullanarak 2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi

Aydın KIZILKAYA*, Ahmet Hamdi KAYRAN

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, çeyrek-düzlem destek bölgesine sahip doğrusal zamanla değişmeyen durağan iki-boyutlu özbağlanımlı kayan ortalamalı (2-B ARMA) modelin parametrelerinin kestirim problemi ele alınmakta ve bu problemin çözümü için, 2-B ARMA model parametreleri ile bu modele eşdeğer sonsuz mertebeden iki-boyutlu özbağlanımlı (2-B EAR) modelin parametreleri arasındaki ilişki incelenmektedir. Bu ilişkiyi esas alarak sonlu mertebeden EAR modelin katsayılarından (p_1, p_2, q_1, q_2). mertebeden 2-B ARMA modelin parametrelerini kestirmek amacıyla; doğrusal denklem takımlarının çözümüyle parametre kestirimlerini gerçekleştiren, yakınsama sorunu olmayan, hesapsal karmaşıklığı düşük yeni bir yöntem önerilmektedir. Önerilen bu yöntem, üç aşamalı olup; birinci aşamada, (p_1, p_2, q_1, q_2). mertebeden 2-B ARMA modeli yaklaşık olarak temsil eden (L_1, L_2). mertebeden 2-B EAR modelin parametreleri değiştirilmiş Yule-Walker denklemleri olarak adlandırılan doğrusal denklem takımlarının çözümüyle elde edilmektedir. İkinci aşamada ise, birinci aşamada elde edilen EAR model katsayılarını önerilen yöntem ile türetilen eşitliklerde kullanarak 2-B ARMA modelin kayan ortalamalı (MA) parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilmektedir. Son olarak, birinci ve ikinci aşamalarda hesaplanan EAR ve MA parametre kestirimlerini türetilen doğrusal denklem ifadesinde yerine koyarak 2-B ARMA modelin özbağlanımlı (AR) kısmını tanımlayan katsayıların hesabı yapılmaktadır. Önerilen yöntemin başarımı, bilgisayar benzetimleri sınanmıştır. Bu amaçla, önerilen yöntemin literatürdeki yöntem ile eşzamanlı çalıştırılması sonucunda üretilen parametre kestirimleri ve bu parametrelere karşı düşen güç izge yoğunluk kestirimleri çeşitli başarımlı ölçütlerine göre karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, önerilen yöntemle oldukça iyi ve tatmin edici sonuçlara ulaşıldığı gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: 2-B ARMA model, 2-B EAR model, parametre kestirimi, çeyrek-düzlem destek bölgesi.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Aydın KIZILKAYA. aydin@ehb.itu.edu.tr; Tel: (212) 285 35 66.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Programında tamamlanmış olan "İki-boyutlu özbağlanımlı kayan ortalamalı model parametrelerinin kestirimi için yeni yaklaşımlar" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 09.02.2006 tarihinde dergiye ulaştırılmış, 28.03.2006 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.03.2007 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Estimation of 2-D ARMA model parameters by using EAR model approach

Extended abstract

This paper considers the parameter estimation problem of a quarter-plane (QP) linear time-invariant (LTI) two-dimensional autoregressive moving average (2-D ARMA) model excited by an unknown zero-mean white Gaussian noise with variance σ_w^2 .

Since the use of nonparametric methods such as Fast Fourier Transform (FFT) yield low-resolution results, 2-D system identification and parametric representations of 2-D stationary random fields based on parametric 2-D autoregressive (AR), moving average (MA), and ARMA models have received great attention in a wide range of image and signal processing applications. These applications include image restoration, image compression, stochastic texture analysis and synthesis, modeling, and high-resolution spectrum estimation of 2-D data, etc. Note that AR and MA models correspond to the special case of ARMA models. The most general models used in modeling the random fields are the ARMA models.

In modeling of 2-D random fields, AR models have been used extensively since their parameters are estimated easily by solving the set of linear equations called as Modified Yule-Walker (MYW) equations. However, as in the one-dimensional case, the parameter estimation procedures for the MA and ARMA models are much more difficult than the AR models since these procedures require a heavy computational burden and there are convergence problems. All of these reasons and intrinsic nonlinearity of estimating the MA parameters cause restriction on making studies based upon MA and ARMA models. In spite of these difficulties, ARMA models are preferred frequently because of their relations with the linear filters having rational transfer function and their abilities on simulating the behavior similar to the noise correctly.

From the parameter parsimony point of view, 2-D ARMA models usually provide the most effective linear models of the 2-D homogeneous random fields and are therefore preferable over its AR or MA counterparts: as compared to the AR and MA models, ARMA models can perform more accurate modeling with a few number of parameters.

From the spectral estimation viewpoint, while the ARMA models can characterize both the peaks and

the valleys, the AR and MA models can characterize only the peaks and the valleys, respectively.

In spite of its advantages, there are a few methods in the literature related to the parameter and spectral estimation of 2-D ARMA models. For the aim of modeling 2-D random fields, the existing 2-D ARMA model-based estimation methods can be classified into two main groups. In the first group of methods, AR and MA parameters of the ARMA model are estimated explicitly from the given data set or its second-order statistics. Thus, the given data set is characterized by either the transfer function of the ARMA model or its power spectral density (PSD) function obtained using the estimated AR and MA parameters. In the second group of methods, the estimation processes are realized on the basis of the PSD function of the ARMA model. AR parameters are estimated explicitly from the given data record or its statistics, and then the MA spectrum parameters are calculated using the estimated AR parameters and the second-order statistics of the data set. Hence, the observation data are characterized by the ARMA model PSD function formed by the estimated AR parameters and MA spectrum parameters. Note that while the MA parameters are acquired explicitly in the first group of methods, the methods involving to the second group obtain the MA spectrum parameters rather than estimating the MA parameters explicitly.

In this paper, we have introduced a simple and computationally efficient method for estimating the parameters of a LTI 2-D ARMA model having QP support region. The suggested method is based on the relation between the parameters of the 2-D ARMA model and those of the equivalent autoregressive (2-D EAR) model. On the basis of this relation, linear equations performing the ARMA model parameter estimation process from the coefficients of the EAR model are derived. The method proposed for this purpose is a three-step approach: firstly, the 2-D EAR model parameters are obtained solving the set of linear equations called as MYW equations; then, the MA parameters are estimated benefiting from the EAR model coefficients; finally, the AR parameters are calculated exploiting the estimated EAR and MA parameters in the derived formula. Performance of the proposed method is analyzed via computer simulations. We demonstrate with simulations that satisfactory results are obtained by the proposed method.

Keywords: 2-D ARMA model, 2-D EAR model, parameter estimation, quarter-plane support region.

Giriş

İki-boyutlu (2-B) özbağlanımlı kayan ortalamalı (ARMA) parametrik modelleri esas alarak 2-B sistem tanılama ve 2-B durağan rastgele alanların parametrik gösterimi, görüntü ve işaret işleme problemlerinde geniş bir uygulama alanı bulmuş ve bulmaya da devam etmektedir. Görüntü onarımı (Argenti vd., 1991; Biemond vd., 1988; Kaufman vd., 1991; Chaparro vd., 1982), görüntü sıkıştırma (Nijim vd., 1996), görüntü kodlama (Chung vd., 1992), kenar belirleme (Tao, 1984), doku analizi ve sentezi (Hall vd., 1995), rastgele zaman serilerinin modellenmesi, izge kestirimi, ve ileri-geri yönde öngörüsü (Cadzow vd., 1981; Zhang vd., 1991; Zhang, 1991), sistem tanılama ve modelleme (Chaparro vd., 1982; Michael vd., 1991; 1994) bu uygulamalara örnek olarak verilebilir.

Modelleme açısından bakıldığında, 2-B rastgele alanlar, doğrusal denklemlerin doğrudan veya yinelemeli olarak çözülmesiyle parametrelerinin hesaplanmasındaki kolaylıktan dolayı AR modeller ile kolayca kısmen modellenebilir. Bu özelliğinden dolayı, 2-B rastgele alanların modellenmesi için 2-B AR model yapısının kullanıldığı bir çok çalışma gerçekleştirilmiştir. Ancak, saf AR modellerle karşılaştırıldığında, ARMA ve MA modeller için parametre kestirim işlemleri daha zordur. Doğası gereği MA parametrelerinin kestiriminin doğrusal olmayan denklemlerin çözümünü gerektirmesi, işlemsel yoğunluk ve yakınsama gibi sorunlar bu zorluğun temel nedenleri arasında gösterilebilir (Lim, 1990; Dudgeon vd., 1984).

Yukarıda sıralanan tüm bu olumsuzluklara rağmen, rasyonel transfer fonksiyonuna sahip doğrusal süzgeçlerle olan ilişkisinden ve gürültüye benzer davranışı daha doğru bir biçimde benzetim yeteneğine sahip olmasından dolayı ARMA modeller, AR ve MA modellerin kullanımına tercih edilmektedir. Çünkü parametrik gösterim açısından ARMA modeller, durağan rastgele alanların en etkili doğrusal modelini sağlarlar. Şöyle ki, güç izge yoğunluğu anlamında, ARMA modeller AR ve MA modellere nazaran daha iyi ve yüksek çözünürlüklü izge kestirimleri üretirler. Çünkü frekans alanında, ARMA

modeller yoğunlaşma ve yayılmayı belirlerken AR modeller sadece yoğunlaşmayı, MA modeller sadece yayılmayı temsil edebilirler. Modelleme anlamında ise, AR ve MA modellere göre daha az sayıda parametre ile 2-B verinin etkin bir biçimde ARMA model ile temsili sağlanabilir (Cadzow vd., 1981; Zhang vd., 1991; Zhang, 1991).

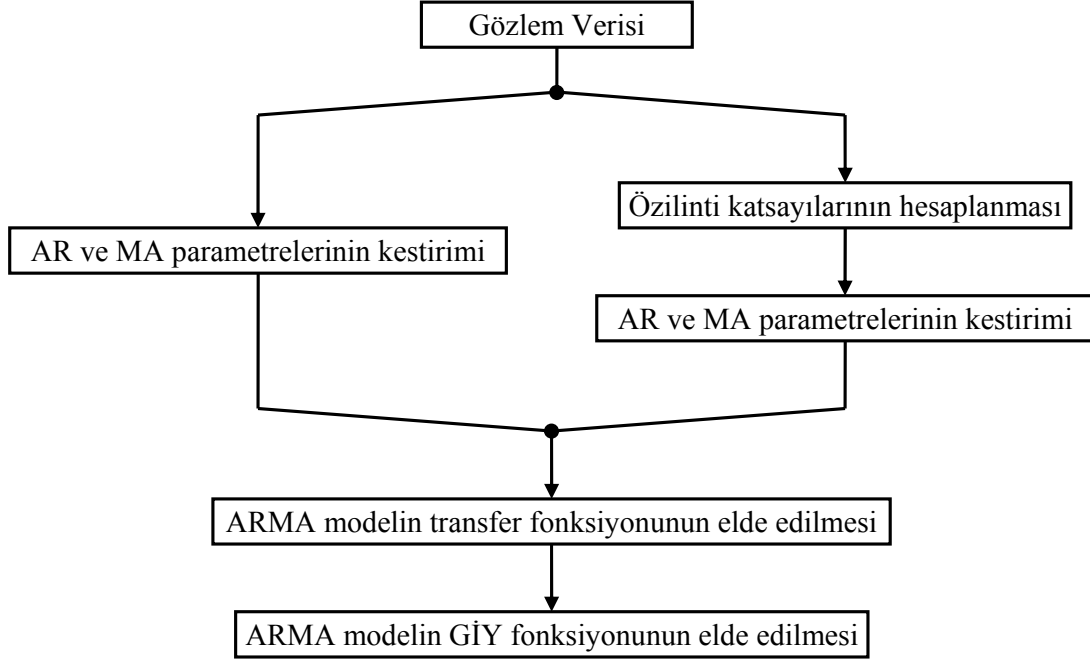
1-B ve 2-B veri kümelerini karakterize etmek amacıyla, 1-B ve 2-B ARMA model yapısını kullanan literatürdeki parametrik kestirim yöntemlerinde izlenen yollar;

- Verilen veri kümesinden veya bu veriye ilişkin hesaplanan istatistiklerden ARMA model parametrelerinin kestiriminin gerçekleştirilmesi ve bu parametrelerle ve/veya bu parametreleri kullanarak elde edilen ARMA modele ilişkin güç izge yoğunluk fonksiyonu ile verilen veri kümesinin karakterize edilmesi (Şekil 1)
- Doğrudan doğruya ARMA modele ilişkin güç izge yoğunluk fonksiyonunu esas alarak, bu fonksiyonu tanımlayan izge parametrelerinin elde edilmesi ve bu parametreleri kullanarak oluşturulan ARMA modelin güç izge yoğunluk fonksiyonu ile verilen 2-B veri kümesinin karakterize edilmesi (Şekil 2)

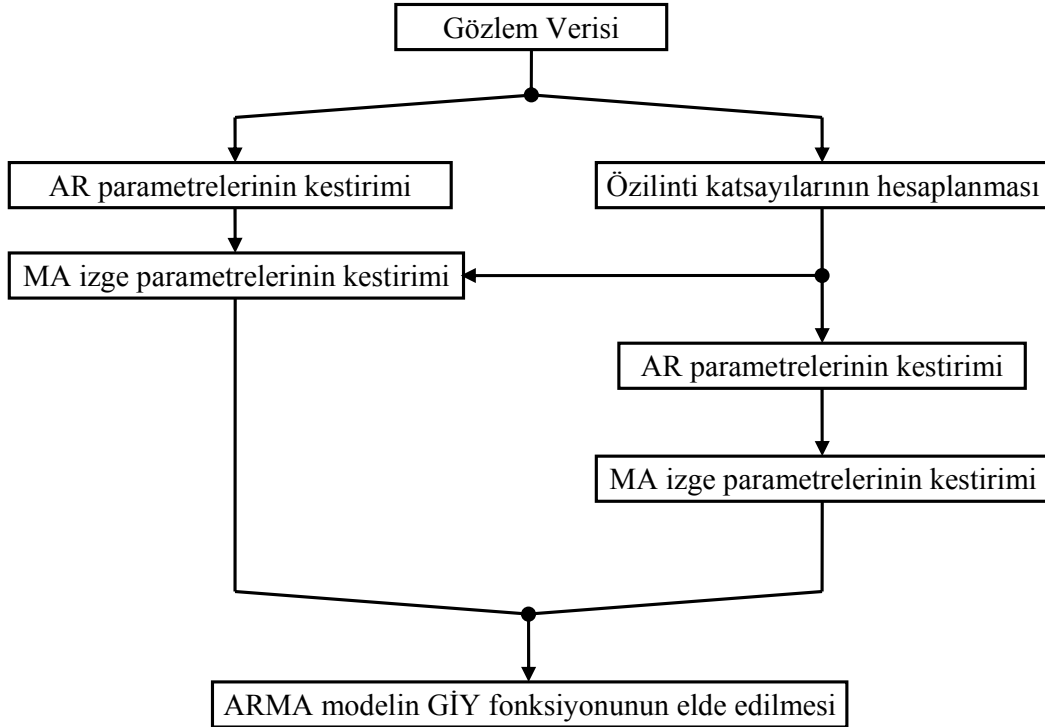
biçiminde iki ana grupta toplanabilir. Bu şekilde iki ana grup altında toplanan yöntemlerden 2-B ARMA model esas alınarak tasarlanan parametre kestirim yöntemleri literatürde sınırlı kalmıştır.

Cadzow ve diğerleri (1981), çeyrek-düzlem (ÇD) destek bölgesine sahip 2-B ARMA modelin parametrelerinin bulunması için en küçük karelere dayalı bir algoritma önermişlerdir. Bu algoritmada AR parametrelerinin kestirim işlemi, ağırlık katsayılarının anlamlı seçimine bağlıdır ve MA parametrelerinin kestirimi açıkça yapılamamaktadır. Bunun yerine, ARMA modelin güç izge yoğunluk (GİY) işlevinin pay kısmını tanımlayan MA izge katsayılarının kestirimi gerçekleştirilmektedir.

2-B ARMA model parametreleri



Şekil 1. Gözlem verisinin, doğrudan doğruya ARMA model parametreleri ile karakterize edilmesine yönelik yapılan çalışmalarda izlenen adımlar



Şekil 2. Gözlem verisinin, ARMA model izge parametreleri ile karakterize edilmesine yönelik yapılan çalışmalarda izlenen adımlar

Alternatif olarak, AR parametrelerinin Yule-Walker (YW) denklemi yaklaşımını kullanarak elde edildiği bir yöntem Zhang v.d., (1991) tarafından önerilmiştir. Cadzow v.d., (1981)'nin yönteminde olduğu gibi bu çalışmada da, MA parametreleri yerine, ARMA modele ilişkin GIY işlevinin pay kısmını tanımlayan MA izge katsayılarının kestirimi gerçekleştirilmektedir. ARMA modele ilişkin MA parametrelerinin açıkça kestirimini sağlayan iteratif bir algoritma ise, Zhang (1991) tarafından geliştirilmiştir. 2-B ARMA modelin MA parametrelerini kestirmek amacıyla Newton-Raphson yöntemine dayalı yinelemeli bir algoritma sunulmuştur. Ancak, hesapsal karmaşıklığın fazla olması ve MA parametrelerinin kestirimi için gerekli olan yineleme işleminin zaman alması algoritmanın etkinliğini sınırlayan unsurlardan bazılarıdır.

Bu çalışmada, çeyrek-düzlem destek bölgesine sahip 2-B ARMA modelin parametrelerinin kestirimi için, 2-B ARMA model parametreleri ile bu modele eşdeğer sonsuz mertebeden bir AR modelin parametreleri arasındaki ilişkinin kullanımı önerilmiştir. 1-B durumda olduğu gibi (Martinelli vd., 1985; Shufang vd., 2000), durağan ve tersi alınabilir (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden bir 2-B ARMA model için $ARMA(p_1, p_2, q_1, q_2) = AR(\infty, \infty)$ ilişkisi mevcuttur. Sonuç olarak, bir ARMA modele küçük hatalarla yeterince yüksek mertebeden bir AR model ile yaklaşılabilir. Bu ilişkiyi dikkate alarak, verilen süreci yaklaşık olarak karakterize edebilen (L_1, L_2) . mertebeden 2-B eşdeğer özbağlanımlı (EAR) model parametrelerinin kestirimi amacıyla, Zhang ve diğerleri (1991)'nin türettiği değiştirilmiş Yule-Walker (DYW) denklemi yaklaşımından faydalanılmıştır. Sonuç olarak, elde edilen EAR model parametreleri önerilen algoritmada kullanılarak 2-B ARMA modelin AR ve MA parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilmiştir. Burada önerilen yaklaşım, Martinelli, v.d., (1985)'nin 1-B ARMA model için geliştirdiği kestirim yönteminin 2-B yapıya genişletilmiş olarak yorumlanabilir.

Önerilen yöntemde kullanılan model

Bu çalışmada, parametre kestirimi için önerilen algoritmada kullanılan model, doğrusal zamanla

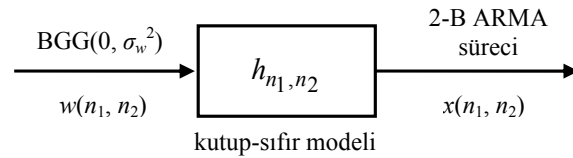
değişmeyen (p_1, p_2, q_1, q_2) . mertebeden ÇD destek bölgesi 2-B ARMA model olup bu modele ilişkin transfer fonksiyonu,

$$H(z_1, z_2) = \frac{B(z_1, z_2)}{A(z_1, z_2)} = \frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l}} \quad (k,l) \neq (0,0) \quad (1)$$

ifadesi ile tanımlıdır. (1)'de verilen modelin tanımlandığı sürecin (n_1, n_2) . örneği

$$x(n_1, n_2) = - \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} x(n_1 - k, n_2 - l) + \sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} w(n_1 - h, n_2 - i) \quad (2)$$

doğrusal fark denklemiyle ifade edilir. Bu fark denklemi aynı zamanda; girişi, sıfır ortalamalı ve σ_w^2 varyanslı beyaz Gauss gürültü süreci $(BGG(0, \sigma_w^2))$ $w(n_1, n_2)$ ile uyarılan sonsuz dürtü yanıtı nedensel doğrusal zamanla değişmeyen ayrık-zamanlı 2-B kutup-sıfır süzgecinin çıkışı tanımlar, Şekil 3.



Şekil 3. 2-B ARMA süreç üretimi için rastgele modeli

Sırasıyla (1) ve (2)'deki eşitliklerde yer alan AR parametreleri $\{a_{k,l} ; 0 \leq k \leq p_1, 0 \leq l \leq p_2\}$ ve MA parametreleri $\{b_{h,i} ; 0 \leq h \leq q_1, 0 \leq i \leq q_2\}$, ÇD destek bölgesi 2-B ARMA modeli ve modele karşı düşen süreci karakterize etmektedir.

Parametre kestirim için kullanılan modelin nedenselliğini dikkate alarak ÇD destek bölgesi 2-B ARMA rastgele alanına ilişkin örnekler,

$0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ ve $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ için (2) ile tanımlanan fark denkleminde üretilir. Sonuç olarak, verilen veya (2) eşitliği ile üretilen $(N_1 \times N_2)$ boyutundaki gözlem verisi örneklerini $\{x(n_1, n_2)\}$ önerilen algoritmada kullanarak 2-B rastgele alanı modelleyen ÇD destek bölgesine sahip ARMA model parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilir.

(1) eşitliği ile tanımlanan ARMA modele ilişkin GIY işlevi, modeli uyarda kullanılan σ_w^2 varyanslı BGG süreci için aşağıdaki gibi verilir:

$$P(e^{jw_1}, e^{jw_2}) = \sigma_w^2 \left| \frac{B(e^{jw_1}, e^{jw_2})}{A(e^{jw_1}, e^{jw_2})} \right|^2$$

$$= \sigma_w^2 \left| \frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} e^{-j(w_1 h + w_2 i)}}{1 + \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} e^{-j(w_1 k + w_2 l)}} \right|^2 \quad (3)$$

Önerilen yöntemde model üzerine yapılan varsayımlar

2-B ARMA model parametrelerinin kestirimi için önerilen yöntemde,

- **(V1)** ARMA modele ilişkin sırasıyla AR ve MA kısımlarının mertebeleri olan p_1, p_2 ve q_1, q_2 'nin bilindiği varsayılmaktadır.
- **(V2)** (1) ve (2)'de, $a_{0,0} = 1$ ve $b_{0,0} = 1$ olduğu varsayılmaktadır.
- **(V3)** İncelenen 2-B ARMA model ve bu model karşı düşen sürecin, ÇD destek bölgesinde tanımlı olduğu varsayılmaktadır.
- **(V4)** Şekil 3 ile verilen doğrusal zamanla değişmeyen kutup-sıfır modelinin girişini süren $w(n_1, n_2)$ işaretinin, sıfır ortalamalı ve σ_w^2 varyanslı BGG sürecinin örneklerinden oluştuğu varsayılmadığıdır.

EAR model parametrelerinin kestirimi

ÇD destek bölgesi ARMA modeli tanımlayan AR ve MA parametrelerinin kestirimi için öne-

rilen algoritmada ilk olarak, algoritmanın temelini oluşturan EAR model parametrelerinin kestirimi probleminin incelenmesi gerekir. 2-B ARMA modele eşdeğer bir AR model, (1) eşitliğinin tersinin asimtotik açılımı olarak

$$\frac{1}{H(z_1, z_2)} = \frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j} \quad (4)$$

biçiminde verilebilir. (4)'deki $\{d_{i,j}\}$ katsayıları, 2-B EAR modelin parametreleridir. (4) ile verilen eşitliğe, küçük hatalarla yeterince yüksek mertebeli bir EAR modeliyle yaklaşmak mümkündür. (1) ve (4) ile verilen eşitliklerden yararlanarak herhangi bir L_1 ve L_2 değeri için

$$\frac{\sum_{h=0}^{q_1} \sum_{i=0}^{q_2} b_{h,i} z_1^{-h} z_2^{-i}}{1 + \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{l=0}^{p_2} a_{k,l} z_1^{-k} z_2^{-l}} \cong \frac{1}{\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j}} \quad (5)$$

$(k, l) \neq (0, 0)$

yaklaşımı yapılabilir. Buna göre, (5) eşitliğinin sağındaki ifadeden (L_1, L_2) . mertebeden EAR modele karşı düşen fark denklemi

$$\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} x(n_1 - i, n_2 - j) = w(n_1, n_2) \quad (6)$$

biçiminde yazılabilir. Nedensellik koşulu altında $l \geq 0$ ve $m \geq 0$ için (6) eşitliğinin her iki yanını $x(n_1 - l, n_2 - m)$ terimi ile çarpılıp elde edilen ifadenin beklenen değeri alınır

$$\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} r(l-i, m-j) = E[w(n_1, n_2) x(n_1 - l, n_2 - m)] \quad (7)$$

eşitliğine ulaşılır. İncelenen 2-B ARMA model nedensel olduğundan dolayı, (7) eşitliğinin sağ tarafı $l = 0$ ve $m = 0$ dışında sıfıra eşittir. Yani,

$$\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} r(l-i, m-j) =$$

$E[w(n_1, n_2)x(n_1 - l, n_2 - m)]\delta(l, m)$ (8) eşitliğindeki $\delta(l, m)$, birim dürtü işlevi olup aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\delta(l, m) = \begin{cases} 1 & ; (l, m) = (0, 0) \\ 0 & ; (l, m) \neq (0, 0) \end{cases} \quad (9)$$

(8)'deki $x(n_1 - l, n_2 - m)$ terimi, incelenen modelin doğrusal zamanla değişmeyen oluşundan yararlanarak yeniden elde edilebilir. Şekil 3'de verilen yapıyı kullanarak katlama toplamından

$$x(n_1 - l, n_2 - m) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_{k_1, k_2} w(n_1 - l - k_1, n_2 - m - k_2) \quad (10)$$

yazılabilir. (10) eşitliğinin her iki yanını $w(n_1, n_2)$ terimi ile çarpılıp sonuç eşitliğinin beklenen değeri alınırsa aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$E[w(n_1, n_2)x(n_1 - l, n_2 - m)] = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_{k_1, k_2} E[w(n_1, n_2)w(n_1 - l - k_1, n_2 - m - k_2)] \quad (11)$$

$w(n_1, n_2)$ için **V4** ile tanımlanan varsayımdan yararlanarak, (11) eşitliği

$$E[w(n_1, n_2)x(n_1 - l, n_2 - m)] = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_{k_1, k_2} \sigma_w^2 \delta(l + k_1, m + k_2) = \sigma_w^2 h_{-l, -m} \quad (12)$$

şeklinde ifade edilebilir. (1) ile verilen modelin nedensel oluşundan ve $l \geq 0, m \geq 0$ koşulundan dolayı (12) eşitliğinin sağ tarafı, yalnızca $l = 0$ ve $m = 0$ için sıfırdan farklı olacaktır. **V2** ile verilen varsayımdan dolayı $h_{0,0} = 1$ yazılabilir. Sonuç olarak, (8) ve (12) eşitliklerinden

$$\sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_2} d_{i,j} r(l - i, m - j) = \sigma_w^2 \delta(l, m) \quad (13)$$

elde edilir. (13) eşitliği, 2-B DYW denklemi olarak adlandırılır. Benzer çıkarım, ÇD destek bölgesi ARMA modelin AR parametrelerinin

kestirimi amacıyla Zhang v.d., (1991) tarafından yapılmıştır. (13) eşitliği $\{d_{i,j}\}$ parametrelerinin kestirimi için matrisel yapıda

$$\mathbf{R}\mathbf{d} = \boldsymbol{\xi} \quad (14)$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. Burada \mathbf{R} , $(L_2 + 1) \times (L_2 + 1)$ boyutlu blok-Toeplitz matris yapısında olup EAR modele karşı düşen sürecin özilinti matrisini tanımlar.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_{-1} & \cdots & \mathbf{R}_{-L_2} \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \cdots & \mathbf{R}_{-L_2+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{L_2} & \mathbf{R}_{L_2-1} & \cdots & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

biçiminde elde edilir. Aynı zamanda, (15)'deki \mathbf{R}_k alt matrislerinin her biri de $(L_1 + 1) \times (L_1 + 1)$ boyutlu Toeplitz matris yapısına sahiptir:

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} r(0, k) & r(-1, k) & \cdots & r(-L_1, k) \\ r(1, k) & r(0, k) & \cdots & r(-L_1+1, k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(L_1, k) & r(L_1-1, k) & \cdots & r(0, k) \end{bmatrix} \quad (16)$$

(14)'deki \mathbf{d} ve $\boldsymbol{\xi}$, $(L_1 + 1)(L_2 + 1)$ bileşenden oluşan sütun vektörleri olup (15) ve (16)'daki yapılaraya göre aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$\mathbf{d} = [d_{0,0}, \dots, d_{L_1,0}, d_{0,1}, \dots, d_{L_1,1}, \dots, d_{0,L_2}, \dots, d_{L_1,L_2}]^T \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\xi} = [\sigma_w^2, 0, 0, \dots, 0]^T \quad (18)$$

(16) eşitliğindeki $\{r(i, j)\}$ katsayıları, verilen ya da (2) ile üretilen $(N_1 \times N_2)$ boyutundaki gözlem verisinin örneklerinden hesaplanan özilinti katsayılarıdır. Durağan rastgele alanlar için

$$r_{xx}(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N_1-1-i} \sum_{n_2=0}^{N_2-1-j} x(n_1, n_2)x(n_1+i, n_2+j) \\ r_{xx}(-i, -j) = r_{xx}(i, j) \quad ; (i, j) \geq (0, 0) \text{ için} \quad (19) \\ r_{xx}(i, -j) = \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N_1-1-i} \sum_{n_2=0}^{N_2-1-j} x(n_1, n_2+j)x(n_1+i, n_2) \\ r_{xx}(-i, j) = r_{xx}(i, -j) \quad ; (i, j) \geq (1, 1) \text{ için}$$

ifadelerinde (Zhang vd., 1991) $x(n_1, n_2)$ gözlem verisi örneklerini kullanarak, (16) için gerekli olan özilinti katsayı kestirimleri elde edilir. (19) eşitliğindeki N , $N=1/(N_1-i)(N_2-j)$ biçiminde tanımlıdır.

Sonuç olarak, (17) ile verilen 2-B EAR model parametrelerinin kestirimi, (14) eşitliğinin $\mathbf{d} = \mathbf{R}^{-1}\xi$ çözümüyle elde edilir. (18) eşitliği ile tanımlanan ξ 'nin ilk bileşeni dışındaki değerler sıfır olduğundan dolayı $\mathbf{R}^{-1}\xi$ çarpımını yapmak yerine, \mathbf{R}^{-1} matrisinin ilk sütununu oluşturan değerlerle ξ vektörünün ilk bileşenini çarpmak çözüm için yeterli olacaktır. Yani,

$$\mathbf{d} = \sigma_w^2 \mathbf{f} \quad (20)$$

(20) eşitliğindeki \mathbf{f} vektörü

$$\mathbf{f} = [f_{0,0}, \dots, f_{L_1,0}, f_{0,1}, \dots, f_{L_1,1}, \dots, f_{0,L_2}, \dots, f_{L_1,L_2}]^T \quad (21)$$

ile \mathbf{R}^{-1} matrisinin ilk sütunundaki değerlerden oluşur.

$\mathbf{V2}$ 'de verilen varsayıma göre \mathbf{d} vektörünün ilk bileşeni $d_{0,0} = 1$ olacaktır. Bu bilgiye dayanarak 2-B ARMA modeli uyardırma kullanılan BGG sürecinin varyansı olan σ_w^2 'yi hesaplamak mümkündür. Buna göre, (17), (20), ve (21)'deki eşitliklerden BGG sürecinin varyansı

$$\sigma_w^2 = \frac{d_{0,0}}{f_{0,0}} = \frac{1}{f_{0,0}} \quad (22)$$

ile elde edilir. Böylece, (21) ve (22) ile bulunan değerleri (20)'de kullanarak 2-B EAR model parametrelerinin kestirimi gerçekleştirilmiş olur.

AR ve MA parametrelerinin kestirimi

Daha önce de belirtildiği gibi EAR ve ARMA model parametreleri arasındaki ilişki, $b_{0,0} = 1$ varsayımına dayanmaktadır. Buna göre, ARMA modelin AR kısmının MA kısmına bölümüyle elde edilen her bir katsayı EAR model katsayısına eşlenmektedir. Bölme işlemi, tam bir eşleme için aslında teorik olarak sonsuza kadar devam eder. Ancak önerilen algoritmada bu eşle-

me işlemi, (L_1, L_2) . mertebeden EAR model için yapılmaktadır ve sonuçta eşleme için $(L_1 + 1)(L_2 + 1)$ adet bölme işlemini yapmak yeterlidir.

Örneğin, ARMA(1,1,1,1) modeli için bu bölme ve eşleme işlemi

$$\frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)} = \frac{1 + a_{0,1}z_2^{-1} + a_{1,0}z_1^{-1} + a_{1,1}z_1^{-1}z_2^{-1}}{1 + b_{0,1}z_2^{-1} + b_{1,0}z_1^{-1} + b_{1,1}z_1^{-1}z_2^{-1}} = \underbrace{1}_{d_{0,0}} + \underbrace{(a_{0,1}-b_{0,1})z_2^{-1}}_{d_{0,1}} + \underbrace{(a_{1,0}-b_{1,0})z_1^{-1}}_{d_{1,0}} + \dots \quad (23)$$

biçiminde verilebilir. ARMA(1,1,1,1) modeli için EAR ve ARMA model parametreleri arasındaki ilişki, (23)'teki bölmenin bölüm kısmında verilmektedir. Sistematik olarak bu bölme işlemine devam edildiğinde EAR(L_1, L_2) ve ARMA(p_1, p_2, q_1, q_2) modelleri için $\mathbf{V2}$ varsayımına göre $\{a_{k,l}; 0 \leq k \leq p_1, 0 \leq l \leq p_2\}$, $\{b_{h,i}; 0 \leq h \leq q_1, 0 \leq i \leq q_2, (h, i) \neq (0, 0)\}$, ve $\{d_{i,j}; 0 \leq i \leq L_1, 0 \leq j \leq L_2\}$ parametreleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sum_{k=0}^{q_1} \sum_{j=1}^{q_2} \mathbf{D}_{k,j} b_{k,j} + \sum_{h=1}^{q_1} \mathbf{D}_{h,0} b_{h,0} = -\mathbf{D}_{0,0} + \mathbf{A} \quad (24)$$

(24) eşitliğindeki $\mathbf{D}_{k,j}$ ve \mathbf{A} matrislerinin her biri, $(L_1 + 1) \times (L_2 + 1)$ boyutlu olup aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,p_2} & \mathbf{O}_{(p_1+1) \times (L_2-p_2)} \\ \vdots & \dots & \vdots & \\ a_{p_1,0} & \dots & a_{p_1,p_2} & \\ \hline & & \mathbf{O}_{(L_1-p_1) \times (p_2+1)} & \mathbf{O}_{(L_1-p_1) \times (L_2-p_2)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{D}_{k,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{k \times j} & & & \mathbf{O}_{k \times (L_2-j+1)} \\ \hline & d_{0,0} & \dots & d_{0,L_2-j} \\ \mathbf{O}_{(L_1-k+1) \times j} & \vdots & \dots & \vdots \\ & d_{L_1-k,0} & \dots & d_{L_1-k,L_2-j} \end{bmatrix} \quad (26)$$

(24)-(26) ile türetilen eşitlikler aynı zamanda $(L_1, L_2) = (\infty, \infty)$ için de geçerlidir. Ancak gerçekleştirilebilirlik açısından bu eşitlikler sonlu (L_1, L_2) değerleri için kullanılarak, (20) ile elde edilen EAR model parametrelerinden ARMA modelin AR ve MA parametrelerinin yaklaşık kestirimi gerçekleştirilecektir.

Kestirilecek parametrelerin sayısı; z_1 -boyutunda $(p_1 + q_1)$ ve z_2 -boyutunda $(p_2 + q_2)$ 'dir. Bunun anlamı şudur: L_1 ve L_2 mertebeleri $L_1 = (p_1 + q_1)$ ve $L_2 = (p_2 + q_2)$ değerlerinin altında seçilemez. Genel olarak, L_1 ve L_2 mertebelerinin sırasıyla $L_1 = (p_1 + q_1)$ ve $L_2 = (p_2 + q_2)$ değerlerinden daha büyük seçilmesi mantıklı olacağından, (24) eşitliğindeki $\sum_{k=0}^{q_1} \sum_{j=1}^{q_2} \mathbf{D}_{k,j} b_{k,j} + \sum_{h=1}^{q_1} \mathbf{D}_{h,0} b_{h,0}$ ve $\mathbf{A} - \mathbf{D}_{0,0}$ matrisleri arasındaki eşleme, bu matrislerin farkının karesini $\{b_{h,i}\}$ MA parametrelerine göre en küçükleyerek elde edilecektir. AR ve MA parametrelerinin reel sayılardan oluştuğunu varsayarak, bu en küçükleme işlemi

$$\varepsilon = \left(\sum_{k=0}^{q_1} \sum_{j=1}^{q_2} \mathbf{D}_{k,j} b_{k,j} + \sum_{h=1}^{q_1} \mathbf{D}_{h,0} b_{h,0} + \mathbf{D}_{0,0} - \mathbf{A} \right)^2 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_{h,i}} = 0; \quad 0 \leq h \leq q_1, 0 \leq i \leq q_2, (h, i) \neq (0, 0) \quad (28)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{0,1,0,1} & \cdots & C_{0,1,0,q_2} & C_{0,1,1,0} & \cdots & C_{0,1,1,q_2} & \cdots & C_{0,1,q_1,0} & \cdots & C_{0,1,q_1,q_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{0,q_2,0,1} & \cdots & C_{0,q_2,0,q_2} & C_{0,q_2,1,0} & \cdots & C_{0,q_2,1,q_2} & \cdots & C_{0,q_2,q_1,0} & \cdots & C_{0,q_2,q_1,q_2} \\ C_{1,0,0,1} & \cdots & C_{1,0,0,q_2} & C_{1,0,1,0} & \cdots & C_{1,0,1,q_2} & \cdots & C_{1,0,q_1,0} & \cdots & C_{1,0,q_1,q_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{1,q_2,0,1} & \cdots & C_{1,q_2,0,q_2} & C_{1,q_2,1,0} & \cdots & C_{1,q_2,1,q_2} & \cdots & C_{1,q_2,q_1,0} & \cdots & C_{1,q_2,q_1,q_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{q_1,0,0,1} & \cdots & C_{q_1,0,0,q_2} & C_{q_1,0,1,0} & \cdots & C_{q_1,0,1,q_2} & \cdots & C_{q_1,0,q_1,0} & \cdots & C_{q_1,0,q_1,q_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{q_1,q_2,0,1} & \cdots & C_{q_1,q_2,0,q_2} & C_{q_1,q_2,1,0} & \cdots & C_{q_1,q_2,1,q_2} & \cdots & C_{q_1,q_2,q_1,0} & \cdots & C_{q_1,q_2,q_1,q_2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$C_{p,r,s,t} = \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{i=p_2+1}^{L_2} \mathbf{D}_{p,r}(k,i) \mathbf{D}_{s,t}(k,i) + \sum_{j=p_1+1}^{L_1} \sum_{l=0}^{L_2} \mathbf{D}_{p,r}(j,l) \mathbf{D}_{s,t}(j,l) \quad (34)$$

ifadeleri ile gerçekleştirilir. Bunun sonucunda, bilinmeyen MA parametresi $q_1 q_2 + q_1 + q_2$ kadar doğrusal denklemler kümesi elde edilir. Bu denklem sistemi, matrisel yapıda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\mathbf{C} \mathbf{b} = \boldsymbol{\zeta} \quad (29)$$

(29)'daki \mathbf{C} matrisi $(q_1 q_2 + q_1 + q_2) \times (q_1 q_2 + q_1 + q_2)$ boyutlu olup (30) eşitliğindeki gibi tanımlıdır.

\mathbf{b} ve $\boldsymbol{\zeta}$ ise, $(q_1 q_2 + q_1 + q_2)$ bileşenden oluşan sütun vektörleri olup bu sütun vektörleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$\mathbf{b} = [b_{0,1}, \dots, b_{0,q_2}, b_{1,0}, \dots, b_{1,q_2}, \dots, b_{q_1,0}, \dots, b_{q_1,q_2}]^T \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_{0,1}, \dots, \zeta_{0,q_2}, \zeta_{1,0}, \dots, \zeta_{1,q_2}, \dots, \zeta_{q_1,0}, \dots, \zeta_{q_1,q_2}]^T \quad (32)$$

(31)'deki sütun vektörü, istenen MA parametre kestirimlerini içerir ve (29) eşitliğinin

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\zeta} \quad (33)$$

çözümüyle elde edilir. (24)-(26)'da tanımlanan eşitliklerinden yararlanarak, sırasıyla (30) ve (32)'de türetilen \mathbf{C} matrisi ve $\boldsymbol{\zeta}$ vektörünün bileşenleri

$$\zeta_{p,r} = - \left(\sum_{k=0}^{p_1} \sum_{i=p_2+1}^{L_2} \mathbf{D}_{0,0}(k,i) \mathbf{D}_{p,r}(k,i) + \sum_{j=p_1+1}^{L_1} \sum_{l=0}^{L_2} \mathbf{D}_{0,0}(j,l) \mathbf{D}_{p,r}(j,l) \right) \quad (35)$$

ile hesaplanır. (34) ve (35)'de, $0 \leq (p, s) \leq q_1$ ve $0 \leq (r, t) \leq q_2$ 'dir. Ancak belirtmekte fayda var: aynı anda $(p, r) \neq (0, 0)$ veya $(s, t) \neq (0, 0)$ 'dir. Yani örneğin $C_{0,0,1,1}$ veya $C_{1,0,0,0}$ tanımlı değildir. Ayrıca, (34) ve (35) eşitliklerindeki $\mathbf{D}_{k,j}(k_1, k_2)$ ifadeleri, (26)'da tanımlanan $\mathbf{D}_{k,j}$ matrislerinin (k_1, k_2) bileşenini temsil eder.

Son olarak, sırasıyla (20) ve (33) eşitlikleri ile ulaşılan EAR ve MA parametre kestirimleri (24)'de yerine koyarak ARMA modele ilişkin AR parametrelerinin kestirimi

$$a_{m,n} = d_{m,n} + \sum_{k=0}^{q_1} \sum_{j=1}^{q_2} \mathbf{D}_{k,j}(m,n) b_{k,j} + \sum_{h=1}^{q_1} \mathbf{D}_{h,0}(m,n) b_{h,0} \quad (36)$$

ifadesi ile kolaylıkla elde edilebilir. Burada, $0 \leq m \leq p_1$ ve $0 \leq n \leq p_2$ 'dir. (36) eşitliği, \mathbf{V}_2 varsayımına göre $d_{0,0} = 1$ sonucunu üretir. Bu sonuç, (22) ile verilen BGG varyansının elde edilmesi için türetilen ifadeyi doğrulamaktadır.

Bilgisayar benzetimleri

Önerilen algoritmanın başarımını analiz etmek ve literatürdeki parametre kestirim algoritması (Zhang, 1991) ile çeşitli başarımlar ölçütleri üzerinden karşılaştırmasını yapmak amacıyla iki farklı ARMA model için bilgisayar benzetimleri gerçekleştirilmiştir. Parametre değerleri Tablo 1'de verilen bu modeller; alçak geçiren yapıya sahip geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeli ve yüksek geçiren yapıya sahip dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeli şeklindedir. Benzetimlerde, bu iki model tipine ilişkin parametrelerin kestirimi ve bu parametrelere karşı düşen GİY işlevlerinin elde edilmesi için kullanılacak olan gözlem verisinin boyutu $(N_1, N_2) = (64, 64)$ olarak seçilmiştir. Buna göre ilk olarak; incelenen modellerin parametrelerini, rastgele üretilen sıfır ortalamalı ve $\sigma_w^2 = 1$ varyanslı BGG sürecinin örnekleri ile kullanarak her bir modele karşı düşen ARMA rastgele süreç örneklerinin $0 \leq (n_1, n_2) \leq 63$ sı

nırları içinde (2) eşitliği ile yapay olarak üretimi gerçekleştirilmiştir. Her bir modele karşı düşen bu süreç örneklerinin, önerilen algoritma ve Zhang (1991) algoritmasında eşzamanlı kullanımı ile parametre kestirimleri elde edilmiştir. En son ulaşılan kestirim değerleri, algoritmaların birbirinden bağımsız 100 koşumu elde edilen parametre değerlerinin ortalamasını alarak elde edilmiştir. Kestirimlerin tutarlılığını göstermek için, kestirilen her bir parametrenin standart sapması da ayrıca hesaplatılmıştır. Karşılaştırmalar açısından algoritmalar arasında uyumluluk için, Zhang (1991) ile hesaplanan MA parametreleri, kendi içerisinde, kestirilen $b_{0,0}$ değeri ile normalize edilmiştir. Amaç, her iki algoritma için, $b_{0,0}$ değerini 1'e eşitlemektir. Gerçek ve kestirilen model parametrelerini (3) eşitliğinde kullanarak elde edilen GİY işlevleri, BGG varyansı σ_w^2 'ye normalize edilmiştir.

Algoritmaların başarımı;

- GİY işlevleri arasındaki benzerliğin ölçüsünü veren Itakura-Saito (I-S) mesafe ölçütü (El-Jaroudi v.d., 1991),
 - Parametre kestirimleri arasındaki benzerliğin ölçüsünü veren, gerçek ve kestirilen AR ve MA parametrelerinin farkını alarak elde edilen katsayı fark matrislerinin norm değerleri,
- esas alınarak değerlendirilmiştir.

Gerçek ve kestirilen model parametrelerinden hesaplanan GİY işlevleri arasındaki I-S mesafe ölçüsü ne kadar küçükse, kestirilen izgeler gerçeğine o kadar yakındır denir (El-Jaroudi v.d., 1991). Algoritmaların I-S mesafe ölçütüne göre karşılaştırılabilmesi için, frekans noktalarının sayısına karşı düşen M_1 ve M_2 'nin değerlerine ihtiyaç vardır. İncelenen model tipleri için GİY bileşenleri, $[-\pi, \pi]$ frekans aralığında $\pi/180$ aralıklarla örneklenerek elde edilmiştir. Sonuçta, gerçek ve kestirilen izgelerin bileşenleri için $M_1 \times M_2 = 361 \times 361$ frekans noktası kullanılmıştır.

Parametre kestirimleri anlamında algoritmaların başarım analizleri ise, bilinen bazı matris normları üzerinden değerlendirilmiştir. Buna göre, gerçek ve kestirilen AR ve MA parametrelerinin farkını alarak elde edilen katsayı matrislerinin norm değeri ne kadar küçükse elde edilen parametre kestirimleri gerçeklerine o kadar yakındır denir. Bir matris için tek bir norm tanımı yoktur: Bir çok norm tanımı yapılabilir. Kestirilen parametre değerlerinin gerçeklerine yakınlığını analiz etmek için, literatürde yaygın olarak kullanılan L_∞ , L_2 , L_1 , ve *Frobenius* norm tanımlarından (Meyer, 2000) faydalanılmıştır.

Önerilen algoritma ile parametre kestirim işlemini gerçekleyebilmek için EAR model mertebeleri olan L_1 ve L_2 değerlerinin bilinmesi gerekir. Daha önce de ifade edildiği gibi L_1 ve L_2 için seçilebilecek en küçük değerler, $L_{1\min} = p_1 + q_1$ ve $L_{2\min} = p_2 + q_2$ 'dir. Ancak çoğu zaman, parametre ve GİY kestirimlerinin doğruluğunu artırmak açısından L_1 ve L_2 'yi, $L_{1\min}$ ve $L_{2\min}$ değerlerinden daha büyük seçmek gerekebilir. Bu çalışmada ise, seçilebilecek optimum EAR model mertebeleri L_1 ve L_2 , tanımını El-Jaroudi v.d., (1991)'nin verdiği I-S mesafe ölçütüne göre deneysel olarak belirlenmiştir. Bu amaçla, L_1 ve L_2 mertebeleri için bir değer aralığı seçilmiştir: $(L_{1\min}, L_{2\min}) - (L_{1\max}, L_{2\max})$. Burada, $L_{1\max}$ ve $L_{2\max}$ en büyük L_1 ve L_2 değerlerini temsil etmektedir. L_1 ve L_2 için en büyük değerler ise, deneysel olarak $(L_{1\max}, L_{2\max}) = (3L_{1\min}, 3L_{2\min})$ biçiminde seçilmiştir. Sonuçta, belirlenen değer aralığında en küçük I-S mesafe ölçüsünü veren L_1 ve L_2 değerleri, optimum değerler olarak alınmıştır. Bu değerleri belirlemek amacıyla öncelikle, verilen değer aralığında L_1 ve L_2 'nin her bir değeri için I-S mesafe ölçüleri hesaplatılmış ve ölçüler i değişkeninin bir fonksiyonu olarak saklanmıştır, yani $d_{I-S}(i)$. Bu mesafe ölçülerinin hangi L_1 ve L_2 değerlerine ait olduğunu belirleyen i , $i = L_1 - L_{1\min} + L_2 - L_{2\min} + (L_{2\max} - L_{2\min})(L_1 - L_{1\min})$ ile elde edilmiştir. Sonuçta, en küçük I-S ölçüsüne karşı düşen i . mesafe ölçüsünü sağlayan L_1 ve L_2 değerleri optimum EAR mertebeleri olarak seçilmiştir. Buna göre, incelenen geniş ve dar bantlı ARMA modeller için, $(L_{1\min}, L_{2\min})$ ve $(L_{1\max}, L_{2\max})$ değerleri sırasıyla (2, 2), (6, 6) ve (4, 2), (12, 6) olarak alınmıştır.

En küçük I-S ölçüsünü sağlayan optimum EAR model mertebeleri, geniş ve dar-bantlı ARMA modeller için sırasıyla $(L_1, L_2) = (5, 5)$ ve $(L_1, L_2) = (6, 3)$ olarak elde edilmiştir. Geniş ve dar bantlı ARMA modelleri için Zhang (1991) algoritmasının ve sırasıyla $(L_1, L_2) = \{(2, 2), (5, 5)\}$ ve $(L_1, L_2) = \{(4, 2), (6, 3)\}$ değerleri ile önerilen algoritmanın üretmiş olduğu parametre kestirim değerleri Tablo 1'de verilmiştir. Kestirilen parametrelerin ve bu parametrelerden hesaplanan GİY işlevlerinin gerçeklerine olan yakınlığını değerlendirmek amacıyla kullanılan norm ve I-S ölçülerine ilişkin değerlere ise Tablo 2'de yer verilmiştir.

Tablo 1'deki parametre kestirim değerlerine baktığımızda, önerilen yöntem ile elde edilen sonuçların orijinaline Zhang (1991) yöntemi ile elde edilenlerden daha fazla yakınsadığı görülmür. Tablo 2'deki başarım ölçütleri de bu düşüncüyü destekler niteliktedir. Parametre kestirimlerine ilişkin standart sapma değerleri de, önerilen yöntemin tutarlılık açısından Zhang (1991) algoritmasına göre daha iyi sonuç verdiğini göstermektedir. Tutarlılık için, standart sapmaların küçük olması arzu edilir.

Sonuçlar

Bir ARMA modelin sonsuz mertebeden bir AR modele eşdeğer olduğu teorisini kullanarak ÇD destek bölgesi ARMA modelin parametrelerinin kestirimi için, EAR model yaklaşımına dayalı hesapsal karmaşıklığı düşük, doğrusal olmayan denklem çözümü gerektirmeyen ve yakınsama problemi olmayan yeni bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntem üç aşamalı olup; ilk olarak, ARMA modeli yaklaşık olarak temsil eden EAR model parametreleri kestirilmekte, daha sonra EAR parametrelerinden MA parametrelerinin hesabı yapılmakta, ve son aşamada ise birinci ve ikinci aşamada elde edilen EAR ve MA parametre değerlerinden AR parametrelerinin kestirimi sağlanmaktadır. Önerilen yöntemde, basit bir düzenleme ile saf MA modelin parametrelerinin kestirimini de gerçeklemek mümkündür. Benzetim sonuçları göstermiştir ki, hem doğruluk hem de tutarlılık anlamında önerilen yöntem ile tatmin edici sonuçlara ulaşılmaktadır.

Tablo 1. Önerilen algoritma ve Zhang (1991) ile elde edilen parametre kestirimleri

Gerçek Değerler	Önerilen Algoritma				Zhang (1991)	
	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.	Ortalama	Std. Sap.
Geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeli						
	(L_1, L_2) = (2, 2) (min.)		(L_1, L_2) = (5, 5) (opt.)			
$a_{0,1}$ = -0.1300	-0.1529	0.0333	-0.1271	0.0358	-0.1363	0.0523
$a_{1,0}$ = -0.0500	-0.0845	0.0387	-0.0494	0.0335	-0.0443	0.0600
$a_{1,1}$ = -0.0600	-0.0964	0.0352	-0.0636	0.0307	-0.0541	0.0596
$b_{0,1}$ = 0.2200	0.1915	0.0302	0.2231	0.0359	0.2489	0.0418
$b_{1,0}$ = 0.2800	0.2320	0.0377	0.2799	0.0337	0.2863	0.0492
$b_{1,1}$ = 0.3550	0.2718	0.0274	0.3549	0.0244	0.2883	0.0357
σ_w^2 = 1.0000	1.0037		0.9822		-	
Dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeli						
	(L_1, L_2) = (4, 2) (min.)		(L_1, L_2) = (6, 3) (opt.)			
$a_{0,1}$ = 0.1700	0.1529	0.0293	0.1704	0.0343	0.1632	0.0368
$a_{1,0}$ = 0.2000	0.1943	0.0961	0.1826	0.0939	0.1640	0.2730
$a_{1,1}$ = -0.2800	-0.3018	0.0373	-0.2836	0.0406	-0.2908	0.0575
$a_{2,0}$ = -0.1600	-0.1586	0.0313	-0.1630	0.0322	-0.0853	0.2401
$a_{2,1}$ = 0.1400	0.1397	0.0462	0.1467	0.0446	0.1583	0.1266
$a_{3,0}$ = 0.0750	0.0731	0.0196	0.0738	0.0194	0.0993	0.0949
$a_{3,1}$ = 0.1250	0.1254	0.0199	0.1257	0.0215	0.0836	0.1341
$b_{0,1}$ = 0.1300	0.1234	0.0291	0.1431	0.0348	0.0949	0.0452
$b_{1,0}$ = -0.1250	-0.1249	0.0978	-0.1370	0.0945	-0.1278	0.2353
$b_{1,1}$ = 0.1930	0.1715	0.0337	0.1862	0.0370	0.1547	0.0508
σ_w^2 = 1.0000	0.9681		0.9635		-	

Tablo 2. Tablo 1'deki istatistiklerin başarımlı ölçütlerine göre değerlendirilmesi

Başarımlı Ölçütleri	Önerilen Algoritma				Zhang (1991)	
	AR	MA	AR	MA	AR	MA
Geniş-bantlı ARMA(1,1,1,1) modeli						
	(L_1, L_2) = (2, 2) (min.)		(L_1, L_2) = (5, 5) (opt.)			
L_1 -normu	0.0593	0.1117	0.0065	0.0032	0.0122	0.0957
L_2 -normu	0.0531	0.0993	0.0046	0.0031	0.0097	0.0730
L_∞ -normu	0.0709	0.1313	0.0041	0.0031	0.0117	0.0730
Frobenius-normu	0.0551	0.1002	0.0046	0.0031	0.0104	0.0730
I - S mesafe ölçüsü	0.003700000		0.000130600		0.008700000	
Dar-bantlı ARMA(3,1,1,1) modeli						
	(L_1, L_2) = (4, 2) (min.)		(L_1, L_2) = (6, 3) (opt.)			
L_1 -normu	0.0396	0.0282	0.0215	0.0200	0.1350	0.0734
L_2 -normu	0.0281	0.0225	0.0179	0.0165	0.0870	0.0520
L_∞ -normu	0.0274	0.0216	0.0210	0.0189	0.0930	0.0411
Frobenius-normu	0.0284	0.0225	0.0193	0.0191	0.0984	0.0520
I - S mesafe ölçüsü	0.00031143		0.00025831		0.01100000	

Kaynaklar

- Argenti, F., Barni, M., Cappellini, V. ve Mecocci, A., (1991). Vector Median Deblurring Filter for Colour Image Restoration, *Electronics Letters*, **27**, 21, 1899-1900.
- Biamond, J., Van Der Putten, F. G. ve Woods, J. W., (1988). Identification and Restoration of Images with Symmetric Noncausal Blurs, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **35**, 4, 385-393.
- Cadzow, J. A. ve Ogino, K., (1981). Two-Dimensional Spectral Estimation, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **29**, 3, 396-401.
- Chaparro, L. F. ve Jury, E. I., (1982). Rational Approximation of 2-D Linear Discrete Systems, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **30**, 5, 780-787.
- Chung, Y. -S. ve Kanefsky, M., (1992). On 2-D Recursive LMS Algorithms Using ARMA Prediction for ADPCM Encoding of Images, *IEEE Transactions on Image Processing*, **1**, 3, 416-422.
- Dudgeon, D. E. ve Mersereau, R. M., (1984). *Multi-dimensional Digital Signal Processing*, 400 sf., Prentice-Hall, New Jersey.
- El-Jaroudi, A. ve Makhoul, J., (1991). Discrete All-Pole Modeling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **39**, 2, 411-423.
- Hall, T. E. ve Giannakis, G. B., (1995). Bispectral Analysis and Model Validation of Texture Images, *IEEE Transactions on Image Processing*, **4**, 7, 996-1009.
- Kaufman, H. ve Tekalp, A. M., (1991). Survey of Estimation Techniques in Image Restoration, *IEEE Control Systems Magazine*, **11**, 1, 16-24.
- Lim, J. S., (1990). *Two-Dimensional Signal and Image Processing*, 694 sf., Prentice-Hall, New Jersey.
- Martinelli, G., Orlandi, G. ve Burrascano, P., (1985). ARMA Estimation by the Classical Predictor, *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, **32**, 5, 506-507.
- Meyer, C. D., (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. 718 sf., Society for Industrial & Applied Mathematics, Philadelphia.
- Michael, W. B. ve Yu, H., (1991). Two-Dimensional Least-Square ARMA Modeling in the Transform Domain, *25th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 650-653, Pacific Grove.
- Michael, W. B. ve Yu, H., (1994). A Linear Approach for Two-Dimensional, Frequency-Domain, Least Square, Signal and System Modeling, *IEEE Transactions on Circuits and Systems - II*, **41**, 12, 786-795.
- Nijim, Y. W., Stearns, S. D. ve Mikhael, W. B., (1996). Lossless compression of Images Employing a Linear IIR Model, *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 305-308, Atlanta.
- Shufang, Z. ve Renjie, L., (2000). A Rapid Algorithm for On-line and Real-Time ARMA Modeling, *5th International Conference on Signal Processing*, 230-232, Beijing, China.
- Tao, K. M., (1984). Adaptive Image Smoothing Algorithms for Edge and Texture Preservation, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 287-290, S. Diego, California.
- Zhang, X.-D. ve Cheng, J., (1991). High Resolution Two-Dimensional ARMA Spectral Estimation, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **39**, 3, 765-770.
- Zhang, X. -D., (1991). On the Estimation of Two-Dimensional Moving Average Parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**, 10, 1196-1199.