

# Çember eksenli sabit kesitli çubukların düzlem dışı serbest titreşimleri

Osman Yaşar DOĞRUER\*, Ekrem TÜFEKÇİ

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

## Özet

Çubuklar, bütün yapı elemanları için en yaygın ve en basit eleman olarak kullanılmaktadır. Çubukların analizi, bütün yüzyıl boyunca araştırmacıların ilgilendiği bir konu olmuştur. Bu çalışmada, mühendislik çalışmalarında önemli bir yeri bulunan, çember eksenli sabit kesitli çubukların düzlem dışı titreşimleri, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınarak incelenmiştir. Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Çubuğun belli bir eğrilik ve uzunluk kombinasyonunda meydana gelen ve burulmadan eğilme moduna geçiş olarak bilinen olay modların rezonans frekanslarında ani artışla karakterize edilir. Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşimlerinde, çubuk eğriliğine etki eden mod geçişi olarak adlandırılan bu olay incelenmiş ve verilen grafiklerde gösterilmiştir. Farklı narinlik oranları ve farklı eksen eğrisi açıklık değerlerinde, çubuğun ilk beş modu için boyutsuz frekans katsayıları belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar, narin ve sığ çubuklarda da olduğu gibi, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkilerinin rezonans frekansları üzerinde öneme haiz bir etkisi olduğunu göstermiştir. Burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkisi, eğri eksenli düzlem çubukların düzlem dışı titreşimleri konusunda en önemli etki olarak karşımıza çıkmaktadır. Konu ile ilgili literatürde verilen örnekler çözümlenerek, sonuçlar tablolarda verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Çember eksenli çubuk, düzlem dışı, serbest titreşim.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Osman Yaşar DOĞRUER. yasar.dogruer@isuzu.com.tr; Tel: (262) 658 84 33.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programında tamamlanmış olan "Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemlerinin analitik çözümü" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 30.01.2006 tarihinde dergiye ulaşmış, 13.07.2006 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.12.2007 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Out-of-plane free vibration of a circular arch with uniform cross-section

### Extended abstract

Arches have long been widely used as structural elements in many mechanical, aerospace and civil engineering applications such as spring design, brake shoes within drum brakes, tire dynamics, piping systems, turbo-machinery blades, curved wires in missile guidance floated gyroscopes, aerospace structures, stiffeners in aircraft structures, arch bridges, curved girder bridges, long span roof structures and earthquake resistant structures. Hence, the dynamic behaviour of arches has been of interest to many researchers since the nineteenth century. In general, the in-plane and out-of-plane vibrations of a planar arch are coupled. However, based on the Bernoulli-Euler hypothesis, if the cross-section of an arch is uniform and doubly symmetric, i.e., the shear center and centroid coincide, and then the in-plane and out-of-plane vibrations are uncoupled. However the out-of-plane bending and torsional responses will still be coupled.

It is often difficult and sometimes impossible to find a general closed-form solution for the vibration problem of an arch, since the governing differential equations possess variable coefficients. The exact solution of the governing equations exists only for a circular beam of uniform cross-section. The previous studies are based upon the classical theory in which either rotatory inertia or shear deformation are taken into account. Timoshenko beam theory considers the effects of shear deformation and rotatory inertia due to both flexural and torsional vibrations and provides a better approximation to the actual arch behaviour. Many techniques have been considered in the papers on out-of-plane vibrations of arches. The Ritz method with different types of trial functions has often been applied in determining the natural frequencies of arches. With the advancement of computer technology and several programs, the finite element method has been used widely to solve for more general geometry and a number of curved elements have been developed. If the behaviour of the arch is non-planar, usual finite element or finite difference model becomes very complicated.

In this study, free out-of-plane vibrations of a circular arch with uniform cross-section are investigated

by taking into account the effects of transverse shear and rotatory inertia due to both flexural and torsional vibrations. The governing differential equations for out-of-plane vibration of uniform circular beams are solved exactly by using the initial value method. The solution does not depend on the boundary conditions. The same solution procedure is also used to obtain the results of other cases in which each effect is considered individually in order to assess its importance. The frequency coefficients are obtained for the first five modes of arches with various slenderness ratios and opening angles. The results show that the flexural and torsional rotatory inertia and shear deformation have very important effects on resonance frequencies, even if slender shallow arches are considered. It is concluded that the torsional rotatory inertia effect is the most significant effect to be included in the analysis.

A phenomenon known as transition of modes from torsional into flexural is characterized by the sharp increment in resonance frequencies of modes that occurs at certain combinations of curvature and length of the arch. This increase in mode frequency is accompanied by a significant change in the mode shapes. In this study, the analysis of the transition phenomenon in vibrational behaviour of a shallow circular arch with uniform cross-section is also presented by using the exact solution of the governing equations. The mode transition phenomenon is shown in figures. Vibration problems for circular beams that have been analyzed in the literature are solved and the results are compared in tables. The comparison shows good agreement between the results.

The main purpose of this paper is to present the exact solution to the governing differential equations of out-of-plane vibrations for a circular arch with uniform cross-section. The effects of shear deformation and rotatory inertia due to the flexural and torsional vibrations are taken into account. But the warping deformation of the cross-section is neglected. The initial value method is used in order to solve the governing differential equations. The solution does not depend on the boundary conditions. The variations of the frequency coefficients with respect to the opening angle are presented for a certain slenderness ratio and several boundary conditions. The examples given in the literature are solved and the results are compared.

**Keywords:** Circular arch, out-of-plane, free vibration.

## **Giriş**

Çubuklar, bütün mühendislik yapılarında en yaygın ve en basit eleman olarak kullanılmaktadır. Çubukların analizi, bütün yüzyıl boyunca araştırmacıların ilgilendiği bir konu olmuştur. Çok sayıda modern mühendislik yapısının önemli elemanı olan çubuklar ve bu konuda yapılan çalışmalar günümüzde hala güncelliğini korumaktadır. Turbo makina pervaneleri, elektrik makinaları, çeşitli yay tasarımları, makina mühendisliğindeki uzaysal yapılar, inşaat mühendisliğindeki depreme dayanıklı yapılar, köprü kemerleri ve karayolları uygulamaları verilebilecek örnekler arasında yer almaktadır. Bu önem ve kullanım yaygınlığı nedeni ile, birçok araştırmacı, çubukların davranış modeli üzerinde çalışmaktadır.

Bugüne kadar yapılan bir çok çalışmada, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin dikkate alınmadığı, klasik Euler-Bernoulli çubuk teorisi kullanılmıştır. Timoshenko çubuk teorisi, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkilerini dikkate almakta ve daha iyi sonuçlar vermektedir.

Bu çalışmada, çember eksenli sabit kesitli çubukların düzlem dışı serbest titreşimleri, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınarak incelenmiştir. Diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Eğri eksenli çubukların titreşim problemi, diğer birçok çalışmaya da araştırma konusu olmuş ve bu çalışmalarda verilen örneklere ilişkin karşılaştırmalı sonuçlar tablolar halinde verilmiştir. Yapılan hesaplarda, sözü edilen etkiler dikkate alınmış, kesitin çarpılma etkisi ihmal edilmiştir. Elde edilen sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu görülmektedir.

Konu ile ilgili ilk ve en önemli çalışmalardan biri Love (1944)'a aittir. Burada; eğri eksenli çubukların elastisite teorisi verilmiş ve daire kesitli tam çember halkasının titreşimleri incelenmiştir. Eksenel uzamanın ihmal edilebileceği

varsayımı ile, genel denklemler oluşturulmuş ve halkanın kendi düzlemi içindeki titreşimleri incelenmiştir. Bu yapılırken, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmiştir. Volterra ve Morell (1961), çember, catenary, sikloid ve parabol eksenli, dairesel kesitli çubukların düzlem dışı frekanslarını, Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Irie ve diğerleri (1980), eksenli çember olmayan değişken kesitli çubukların sönümlü, zorlanmış titreşimlerini incelemişlerdir. Serbest ucundan sinüzoidal değişen moment ve kuvvetlerle zorlanan, ankastre-serbest mesnetli bir çubuğun doğal frekansları incelenmiştir. Çember eksenli kalın çubukların, düzlem dışı titreşimlerine ait doğal frekansları, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri de dikkate alınarak, Bickford ve Maganty (1986) tarafından yapılan çalışmada verilmektedir. Kawakami ve diğerleri (1995), eğri eksenli, değişken kesitli düzlemsel çubukların düzlem-içi ve düzlem dışı serbest titreşimlerini Green fonksiyonu yardımıyla elde etmişlerdir. Howson ve Jemah (1999), eğri eksenli düzlemsel çubukların kendi düzlemine dik doğrultudaki doğal frekanslarını, sonlu elemanlar yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Huang vd. (1998) tarafından yapılan çalışmada, eksenli çember olmayan, değişken kesitli düzlemsel çubukların düzlem dışı dinamik analizi "Dinamik Rijitlik Matrisi" yöntemi kullanılarak verilmekte, Laplace dönüşüm tekniği uygulanarak, eğri eksenli çubuğun düzlem dışı serbest titreşimlerinin kesin çözümü, farklı sınır şartları ve farklı yükleme durumları için genel bir ifade olarak verilmektedir.

Bu çalışmanın temel amacı, çember eksenli sabit kesitli düzlemsel çubukların düzlem dışı serbest titreşimlerini, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınarak incelenmektir. Burada kesit çarpılması etkisi ihmal edilmiştir. Diferansiyel denklem takımının çözümünde, Tufekci ve Arpacı (1998) tarafından çember eksenli sabit kesitli çubukların düzlem içi titreşimleri için verilen başlangıç değerleri yöntemi kullanılmıştır. Boyutsuz frekansların çubuk açıklığına göre değişimi, belirli narinlik oranında farklı sınır şartlarında verilmiştir. Lite-

ratürde verilen örnekler çözülerek sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Frekanslar; ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest olmak üzere, üç farklı mesnetleme durumu için elde edilmiştir. Farklı sınır şartlarında,  $\phi_r$  çubuk açısı ve narinlik oranının ( $\lambda=R/i$ ) doğal frekanslar üzerindeki etkisi incelenmiş, ilk beş mod için boyutsuz frekans katsayıları hesaplanmıştır.

Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşimlerinde, mod geçişi olayı da incelenmiş ve bu durum verilen grafiklerde gösterilmiştir. Yapılan literatür araştırmasında, mod geçişi konusunu ele alan bir çalışmaya rastlanmamıştır.

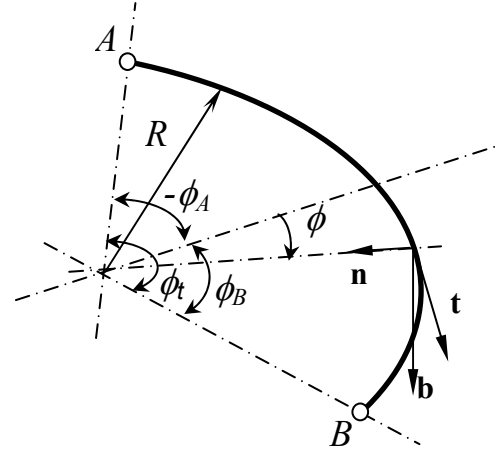
### Genel bağıntılar

Elastik çubukların düzlem dışı denklemleri (Şekil 1), kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınarak aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\phi} + R\Omega_n - \frac{R}{GA/k_b} F_b &= 0 \\ \frac{d\Omega_n}{d\phi} + \Omega_t - \frac{R}{EI_n} M_n &= 0 \\ \frac{d\Omega_t}{d\phi} - \Omega_n - \frac{R}{GJ} M_t &= 0 \\ \frac{dM_n}{d\phi} + M_t - RF_b + R\mu \frac{I_n}{A} \omega^2 \Omega_n &= 0 \\ \frac{dM_t}{d\phi} - M_n + R\mu \frac{I_p}{A} \omega^2 \Omega_t &= 0 \\ \frac{dF_b}{d\phi} + R\mu \omega^2 v &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Burada;  $v$  binormal yerdeğiştirme,  $(\phi)$  yay açıklığı,  $\Omega_n$ ,  $\Omega_t$  normal ve teğetsel eksen üzerindeki dönme açıları,  $R_0(\phi)$  şekil değiştirmemiş çubuğun eksen eğrisinin eğrilik yarıçapı,  $A$  kesit alanı,  $I_n$  kesitin normal eksenine göre eylemsizlik momentini,  $I_p$  kesitin polar eylemsizlik momentini, göstermektedir.  $F_b$  kuvvetin binormal bileşeni,  $M_n$  ve  $M_t$  normal ve teğetsel eksen üzerinde-

ki iç momentler,  $\omega$  açısal frekans,  $k_b$  kayma gerilmelerinin kesite üniform olarak dağılmadıklarını gösteren bir sabit,  $E$  ve  $G$  ise elastisite ve kayma modülüdür.



Şekil 1. Eğri eksenli çubuk geometrisi ve koordinat sistemi

Bilindiği gibi, Coulomb teorisi; burulma zorlaması etkisi altındaki dairesel kesitli çubukların kesin çözümünü vermektedir. Burada, şekil değiştirme sonrası, kesitin düzlem kaldığı ve herhangi bir çarpılma-deformasyon olmaksızın eksen etrafında döndüğü kabul edilir. Bir başka deyişle, kesitin herhangi bir noktasındaki kayma gerilmesi kesit yarıçapına diktir. Bu durumda, burulma sabiti, kesitin polar eylemsizlik momentini olarak belirlenir

Ancak, kesiti dairesel olmayan prizmatik çubuklarda kesit çarpılması önem kazanır. Uçlarından etkiyen burulma momentiyle zorlanan prizmatik çubukların burulma probleminin çözümü Saint-Venant tarafından verilmiştir (Timoshenko ve Goodier, 1951). Bu teori, tüm kesitlerde aynı miktarda, çarpılma olduğunu varsaymaktadır. Burada, kesit dönmesi ve kesit çarpılması dikkate alınarak, burulma eylemsizlik momentini aşağıdaki gibi verilmektedir;

$$J = \iint_{alan} \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dA \quad (2)$$

Dikdörtgen kesitli prizmatik çubuğun burulma eylemsizlik momentini,

$$J = \frac{WH^3}{3} \left[ 1 - \frac{192H}{\pi^5 W} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \tanh \frac{\pi(2n-1)W}{2H} \right] \quad W \geq H \quad (3)$$

olarak bilinmektedir (Timoshenko ve Goodier 1951, Rubin 2000). Burada W ve H kesitin boyutlarıdır. Bunun yerine, oldukça iyi sonuç veren aşağıdaki yaklaşık bağıntı kullanılabilir;

$$J = \frac{WH^3}{3} \left[ 1 - 0.63 \frac{H}{W} \left( 1 - \frac{H^4}{12W^4} \right) \right] \quad W \geq H \quad (4)$$

Bazı yazarlar, burulma sabiti yerine, polar eylemsizlik momentini kullanmıştır (Tüfekçi, 2004 ve Lee ve Chao, 2000). Polar eylemsizlik momenti yerine, burulma sabiti kullanılması durumunda, maksimum kayma gerilmesi dikdörtgen kesidin köşelerinde meydana gelmektedir. Yang ve diğerleri (2001), çalışmalarında hem burulma sabiti hem de polar eylemsizlik momenti yerine burulma sabitini kullanmışlardır.

(1) denklemi aşağıdaki şekilde matrisel formda yazılabilir :

$$dy(\phi)/d\phi = \mathbf{A}y(\phi) \quad (5)$$

Burada;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & Rk_b/GA \\ 0 & 0 & -1 & R/EI_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/GJ & 0 \\ 0 & -R\mu\omega^2 \frac{I_n}{A} & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & -R\mu\omega^2 \frac{I_p}{A} & 1 & 0 & 0 \\ -R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y(\phi) = [v \quad \Omega_n \quad \Omega_t \quad M_n \quad M_t \quad F_b] \quad (6)$$

şeklindedir.

Denklem takımının çözümü aşağıdaki denklem yardımıyla bulunabilir;

$$y(\phi) = e^{\mathbf{A}\phi} y_0 \quad (7)$$

Burada,  $y_0 = y(\phi_0)$ , bilinen  $\phi = \phi_0$  referans kordinatındaki başlangıç değerleri vektörünü ifade etmektedir.  $e^{\mathbf{A}\phi}$  terimi, Tüfekçi ve Arpacı

(1998) tarafından verilen yöntemle ifade edilebilir. Asal matrisin altı elemanı, A ve B uçlarındaki sınır şartları kullanılarak elde edilebilir (Şekil 1).

Ankastre uç :

$$v(-\phi_A) = 0 \quad ; \quad \Omega_n(-\phi_A) = 0 \quad ; \quad \Omega_t(-\phi_A) = 0$$

Serbest uç :

$$M_t(-\phi_A) = 0 \quad ; \quad M_n(-\phi_A) = 0 \quad ; \quad F_b(-\phi_A) = 0 \quad (8)$$

Sınır şartlarından elde edilen altı denklem, homojen denklem takımı oluşturduğundan, sıfırdan farklı çözüm, katsayılar matrisi determinatının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur.

### Sayısal sonuçlar ve karşılaştırma

Boyutsuz frekans katsayısı ( $c_i = \omega_i R^2 \phi_i^2 (\mu/EI_n)^{1/2}$ ) beş farklı durum için hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar grafikler halinde verilmiştir.

Durum 1: Bütün etkiler ihmal

Durum 2: Bütün etkiler dahil

Durum 3: Sadece kayma deformasyonu etkisi

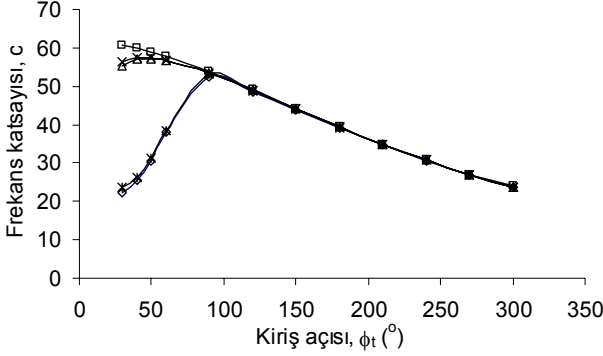
Durum 4: Eğilme nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkisi

Durum 5: Burulma nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkisi

Frekanslar; ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest olmak üzere, üç farklı mesnetleme durumu için elde edilmiştir. Farklı sınır şartlarında,  $\phi_T$  çubuk açısı ve narinlik oranının ( $\lambda=R/i$ ,  $i=(I_n/A)^{1/2}$  jirasyon yarıçapı) doğal frekanslar üzerindeki etkisi tespit edilmiş, ilk beş mod için boyutsuz frekans katsayıları hesaplanmıştır.

Şekil 2'de,  $\lambda=50$  değeri ve serbest-serbest mesnet durumu için, birinci frekans katsayısının  $\phi_T$  çubuk açısı ile değişimi verilmektedir. Küçük çubuk açılarında, sonuçların birbirinden oldukça farklı, büyük çubuk açılarında ise, birbirine yakın olduğu görülmektedir. Durum 2'de, frekans katsayısı keskin bir şekilde yükselmekte ve sonra yavaşça düşmektedir. Frekans değerinde ortaya çıkan bu ani ve keskin artış mod geçişi ne-

deniyle meydana gelmektedir. Verilen örnekte bu durum, çubuk açısının  $90^0$  değeri civarında gözlenmektedir. Grafikten kolayca görüleceği üzere, burulma nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği en önemli etki olarak karşımıza çıkmaktadır.



Şekil 2. Birinci frekans katsayısının çubuk açısına göre değişimi, (serbest-serbest mesnet, narinlik oranı  $\lambda=50$ ).

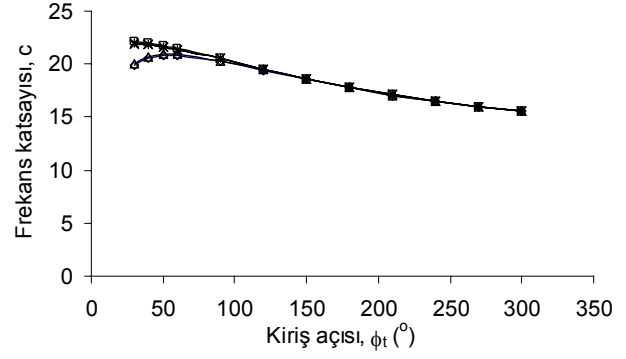
□ durum 1; ◇ durum 2; △ durum 3; × durum 4; \* durum 5

Tahmin edildiği gibi, büyük narinlik oranlarında ve büyük çubuk açılarında, bütün durumlara ait eğriler birbirlerine yaklaşımaktadır.

Ankastre-ankastre mesnet durumu ve  $\lambda=50$  değeri için, çubuk açısının birinci mod frekans katsayısı üzerindeki etkisi Şekil 3'de verilmektedir. Farklı durumları gösteren eğrilerin, serbest-serbest mesnet durumunda elde edilen eğrilere göre, birbiri ile daha uyumlu olduğu görülmektedir.

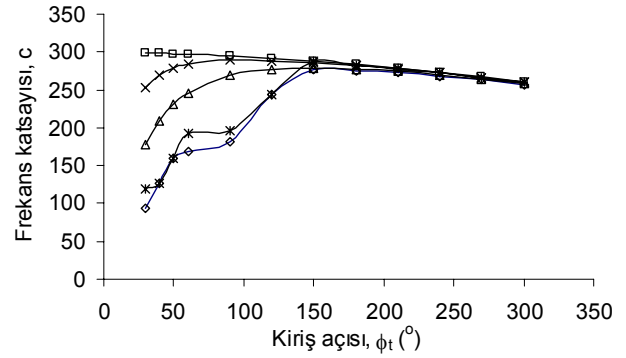
Ankastre-ankastre mesnet durumunda, beşinci mod frekans katsayısının değişimi Şekil 4'te gösterilmektedir. Beş değişik durum için elde edilen sonuçlar, sığ çubuklarda birbirine göre belirgin farklılık göstermektedir ( $\phi_T=150^0$ 'ye kadar). Öte yandan, kayma deformasyonu ve eğilme nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkilerinin önemi, yüksek mod sayıları ve küçük çubuk açılarında ortaya çıkmaktadır.

Ankastre-serbest bir çubuğun ilk beş moduna ait frekans katsayıları narinlik oranı  $\lambda=50$  olmak üzere Şekil 5'te verilmektedir. Burada, kayma



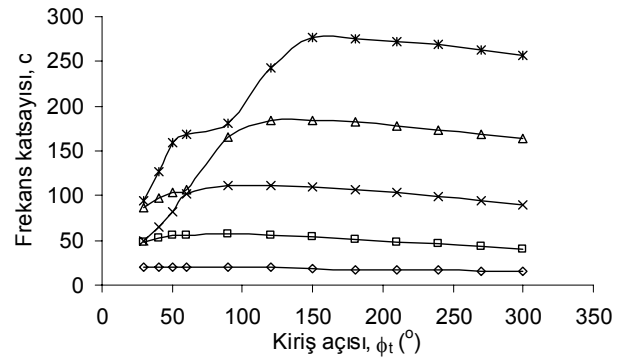
Şekil 3. Birinci frekans katsayısının çubuk açısına göre değişimi, (ankastre-ankastre mesnet, narinlik oranı  $\lambda=50$ ).

□ durum 1; ◇ durum 2; △ durum 3; × durum 4; \* durum 5



Şekil 4. Beşinci frekans katsayısının çubuk açısına göre değişimi, (ankastre-ankastre mesnet, narinlik oranı  $\lambda=50$ ).

□ durum 1; ◇ durum 2; △ durum 3; × durum 4; \* durum 5



Şekil 5. İlk beş frekans katsayısının çubuk açısına göre değişimi, (ankastre-serbest mesnet, narinlik oranı  $\lambda=50$ ).

□ durum 1; ◇ durum 2; △ durum 3; × durum 4; \* durum 5

deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınmıştır. Mod geçişi nedeni ile ortaya çıkan, frekanslardaki ani ve keskin artışlar, grafiklerden görülebilmektedir. Frekans eğrilerinin birbirine yaklaştığı noktalarda, mod şekilleri, burulmadan eğilmeye doğru değişim göstermektedir.

Tablo 1’de, ankastre-ankastre çubuk için, bu çalışma, Huang ve diğerleri (1998), Irie ve diğerleri (1980) tarafından elde edilen boyutsuz frekanslar verilmektedir.

Tablo 1. Dairesel abit kesitli çubuğun boyutsuz frekansları  $\omega R^2 \sqrt{\mu/(EI_n)}$  ( $\phi_i=80^\circ$  ve  $\lambda=20$ )

Mod Sayısı	Bu çalışma	Huang ve diğerleri (2000)	Irie ve diğerleri (1982)
1	3.13528	3.13412	3.134
2	5.02582	5.02223	5.022
3	5.58453	5.58418	5.584
4	6.74026	6.73358	6.734

Bu örnekte, dairesel sabit kesitli çubuk, çubuk açısı  $\phi_r=80^\circ$  ve narinlik oranı  $\lambda=20$  değerleri için incelenmiştir. Burada, Huang ve diğerleri (1998) dinamik rijitlik matris yöntemini kullanırken, Irie ve diğerleri (1980) transfer matris yöntemini kullanmıştır. Tablo 1’den sonuçların birbirine yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 2 ve 3’de çember eksenli dairesel ve kare kesitli çubukların boyutsuz frekans değerleri  $\omega R^2 \sqrt{\mu/(EI_n)}$ , ankastre-ankastre mesnet durumu için verilmektedir. Bu örnekte,  $\phi_r=60^\circ, 120^\circ$  ve  $180^\circ$ , narinlik oranı ise  $\lambda=20$  ve  $100$  olarak alınmıştır. Poisson oranı  $0.3$  ve kayma gerilmelerinin keside uniform yayılmadıklarını gösteren  $k_b$  sabiti, dairesel kesit için  $k_b = 1/0.89$  ve kare kesit için  $k_b = 1/0.85$  şeklinde alınmıştır. Tablolardan, dairesel ve kare kesit için de, elde edilen sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu görülmektedir.

Bu tablolarda, Irie ve diğerleri (1980), Kang ve diğerleri (1995) ve Howson ve Jemah (1999) tarafından elde edilen sonuçlarla bu çalışmanın sonuçları karşılaştırılmaktadır.

Tablo 2. Çember eksenli dairesel kesitli çubuğun boyutsuz frekansları  $\omega R^2 \sqrt{\mu/(EI_n)}$  ( $k_b=1/0.89$ , Poisson oranı  $\nu=0.3$ )

$\lambda$	$\phi$ ( $^\circ$ )	Mod Sayısı	Bu çalışma	Kang (1995)	Irie (1980)	Howson (1999)
20	60	1	16.88495	16.885	16.88	16.885
		2	39.70036	-	39.70	39.700
		3	40.93407	-	40.90	40.934
		4	70.58051	-	70.51	70.581
	120	1	4.309414	4.3094	4.309	4.3094
		2	11.79597	-	11.79	11.796
		3	22.51022	-	22.50	22.510
		4	23.30273	-	23.30	23.303
	180	1	1.790849	1.7908	1.791	1.7908
		2	5.032438	-	5.032	5.032
		3	10.23228	-	10.23	10.232
		4	16.91733	-	16.91	16.917
100	60	1	19.45376	19.454	19.45	19.454
		2	54.14767	-	54.14	54.148
		3	105.8608	-	105.9	105.86
		4	173.1582	-	173.1	173.16
	120	1	4.473080	4.4731	4.473	4.4731
		2	12.89161	-	12.89	12.892
		3	26.08059	-	26.08	26.081
		4	43.68398	-	43.68	43.684
	180	1	1.818173	1.8182	1.818	1.8182
		2	5.241521	-	5.242	5.2415
		3	10.98890	-	10.99	10.989
		4	18.81336	-	18.81	18.813

E Silva ve Ugueria (1988) eğri eksenli çubukların düzlem dışı titreşim probleminin çözümü konusunda yeni bir analitik model ortaya koymuştur. Bu çalışmada, ayrıca, teorik hesapların doğruluğunu göstermek için Tablo 4’de sonuçları verilen deneysel çalışmalar da yapılmıştır.

E Silva ve Ugueria (1988) tarafından elde edilen sonuçlar ile bu çalışmanın sonuçları karşılaştırmalı olarak Tablo 4’te verilmiştir.

Tablo 3. Çember eksenli kare kesitli çubuğun boyutsuz frekansları  $\omega R^2 \sqrt{\mu/(EI_n)}$  ( $k_b=1/0.85$ , Poisson oranı  $\nu=0.3$ )

$\lambda$	$\phi$ (°)	Mod Sayısı	Bu çalış- ma	Kang (1995)	Irie (1980)	Howson (1999)
20	60	1	16.74397	16.744	16.74	16.743
		2	36.94631	-	36.92	36.921
		3	40.45051	-	40.45	40.449
		4	69.61974	-	69.62	69.618
	120	1	4.282547	4.2827	4.282	4.2823
		2	11.69060	-	11.69	11.690
		3	22.05355	-	22.05	22.045
		4	22.38193	-	22.38	22.379
	180	1	1.776521	1.7766	1.776	1.7764
		2	4.981896	-	4.982	4.9814
		3	10.134003	-	10.13	10.133
		4	16.76278	-	16.76	16.762
100	60	1	19.40190	19.402	19.40	19.401
		2	54.02958	-	54.03	54.029
		3	105.64828	-	105.6	105.65
		4	172.77355	-	172.8	172.77
	120	1	4.451450	4.4516	4.451	4.4512
		2	12.82629	-	12.83	12.826
		3	25.98937	-	25.99	26.988
		4	43.57053	-	43.57	43.570
	180	1	1.804340	1.8045	1.804	1.8042
		2	5.197995	-	5.198	5.1975
		3	10.91819	-	10.92	10.917
		4	18.72548	-	18.72	18.725

Hesaplarda dikkate alınan etkiler aşağıdaki gibi gruplandırılmıştır;

**A Hali :** Kayma deformasyonu ve burulma nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınmaktadır.

**B Hali :** Bütün etkilerin ihmal edildiği klasik çubuk teorisi kullanılmaktadır.

**C Hali :** Sadece kayma deformasyonu etkisi ihmal edilmektedir. Hem eğilme hem de burulma nedeni ile ortaya çıkan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınmaktadır.

**D Hali :** Bütün etkiler dikkate alınmaktadır.

Genel olarak sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğunu söylemek mümkündür. Ancak, her iki çalışmada da, dördüncü doğal frekansların kendi

içindeki birbirine göre olan farkları, ilk üç moda göre daha fazladır. Deneysel sonuçlarla karşılaştırıldığında, bu çalışmada elde edilen sonuçların, E Silva ve Ugueria (1988) tarafından elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir. Fakat, özellikle dördüncü modda, teorik ve deneysel frekanslar arasındaki fark daha büyüktür.

## Sonuçlar

Çember eksenli sabit kesitli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşimlerinin kesin çözümü, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınarak, başlangıç değerleri yöntemi ile elde edilmiştir. Açıkça görülmektedir ki, bütün etkileri ihmal eden klasik çubuk teorisi, çubuğun gerçek davranışını yansıtmamaktadır. Burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkisi, eğri eksenli düzlem çubukların düzlem dışı titreşimleri konusunda, özellikle sığ çubuklarda en önemli etki olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu durum narin çubuklarda ve küçük mod sayılarında da geçerli olmaktadır. Diğer taraftan, kalın çubukların hesabında, kayma deformasyonu ve eğilmeden kaynaklanan dönme eylemsizliği etkileri dikkate alınması gerektiği bilinmektedir.

Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşimlerinde, bütün mod sayılarında hesaplanan doğal frekanslar, sığ çubukların frekanslarında keskin bir artış ve sonradan yavaşça azalma meydana geldiğini ortaya koymuştur. Klasik çubuk teorisinde gözlenmeyen bu durum, mod geçişi olayı nedeni ile ortaya çıkmaktadır. Mod geçişi olayı, mod frekanslarındaki ani artış olarak kendini göstermektedir ve belirli bir çubuk eğrilğine ve uzunluğuna sahip çubuklarda meydana gelmektedir.

Ankastre-ankastre ve serbest-serbest sınır şartlarında, çubuğun davranışı birbirine benzemektedir. Ankastre-serbest sınır şartında, diğer sınır şartlarına göre, çubuk davranışında belirgin farklılıklar olduğu görülmektedir. Ankastre-serbest çubuk için, bütün narinlik oranlarında, doğal frekanslar, çubuk açısının artmasıyla birlikte artmaktadır.



Tablo 4. Elde edilen frekans değerleri (Hz), bu çalışma ve E Silva ve Ugueria (1988).

Mod	$\phi$ (°)	Bu çalışma				E Silva ve Ugueria (1988)				Deney
		A Hali	B Hali	C Hali	D Hali	A Hali	B Hali	C Hali	D Hali	
1	30	786.673	800.647	514.74	513.26	782.87	796.75	634.21	632.36	-
	60	719.062	730.805	707.89	703.05	715.46	727.2	712.36	707.29	-
	90	633.293	642.638	617.91	614.83	630.2	639.18	623.42	620.25	-
	180	402.524	407.203	394.43	393.67	400.2	400.3	395.81	391.05	387.5
	270	256.575	259.112	254.03	253.74	255.0	254.2	253.7	250.8	250.5
2	30	1425.55	1474.05	786.95	779.92	1418.6	1466.1	786.33	779.6	-
	60	1382.72	1428.2	848.47	845.29	1376.0	1421.2	1053.5	1046.4	-
	90	1317.30	1358.46	1072.9	1065.6	1310.7	1351.8	1203.4	1190.2	-
	180	1053.20	1080.20	998.84	991.50	1047.8	1067.2	1023.4	1007.2	967.6
	270	788.136	805.047	762.26	759.17	784.1	792.9	771.19	760.4	747.1
3	30	2508.81	2651.78	1597.8	1565.7	2494.2	2642.5	1605.1	1570.7	-
	60	2435.99	2571.17	1612.8	1584.1	2424.8	2562.5	1700.8	1671.2	-
	90	2339.53	2464.67	1734.4	1711.7	2328.8	2456.0	2045.6	2022.2	-
	180	2002.42	2094.98	1831.3	1804.3	1992.5	2074.1	1927.9	1882.2	1717.5
	270	1646.99	1711.59	1551.6	1534.5	1638.2	1690.5	1596.9	1564.2	1487.5
4	30	3572.73	3868.85	1639.5	1637.2	3675.0	3458.5	2162.4	2153.4	-
	60	3529.95	3818.44	1753.1	1744.	3459.3	3550.6	2197.8	2167.4	-
	90	3462.53	3739.28	1861.6	1844.9	3451.3	3614.2	2180.2	2136.2	-
	180	3155.90	3383.38	2524.1	2489.8	3143.4	3370.4	2864.3	2818.0	2763.0
	270	2766.24	2940.69	2510.8	2465.5	2752.0	2910.3	2657.8	2580.0	2460.2

Literatürdeki çalışmalarda verilen örnekler çözülerek burada elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sonuçlar arasında oldukça iyi bir uyum bulunmaktadır. Çözülen bütün örnekler, kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkilerinin, eğri eksenli çubukların düzlem dışı titreşimleri konusunda önemli bir yeri bulunduğunu göstermiştir. Bu etkilerin, yüksek mod sayılarında da ayrı bir önem kazandığı bilinmektedir.

### Kaynaklar

- Auciello, N.M., De Rosa, M.A., (1994). Free vibrations of circular arches: A review, *Journal of Sound and Vibration*, **174**, 433-458.
- Bickford, W.B., Maganty, S.P., (1986). On the out-of-plane vibrations of thick rings, *Journal of Sound and Vibration*, **108**, 503-507.

- Chidamparam, P., Leissa, A.W., (1993). Vibrations of a Planar Curved Beams, Rings and Arches, *Applied Mechanics Reviews*, **46**, 467-483.
- E Silva, J.M.M., Ugueria, A.P.V., (1988). Out-of-plane dynamic response of curved beams-An analytical model, *International Journal of Solids and Structures*, **24**, 271-284.
- Howson, W.P., Jamah, A.K., Zhou, J.Q., (1995). Exact natural frequencies for out-of-plane motion of plane structures composed of curved beam members, *Computers and Structures*, **55**, 989-995.
- Howson, W.P., Jemah, A.K., (1999). Exact out-of-plane natural frequencies of curved Timoshenko beams, *Journal of Engineering Mechanics*, **125**, 19-25.
- Huang, C.S., Tseng, Y.P., Chang, S.H., (1998). Out-of-plane dynamic responses of non-circular curved beams by numerical Laplace transform, *Journal of Sound and Vibration*, **215**, 407-424.

- Irie, T., Yamada, G., Takahashi, I., (1980). The steady state out-of-plane response of a Timoshenko curved beam with internal damping, *Journal of Sound and Vibration*, **71**, 145-156.
- Irie, T., Yamada, G., Takahashi, I., (1982). Natural frequencies of out-of-plane vibration of arcs, *Journal of Applied Mechanics*, **49**, 910-913.
- Kang, K., Bert, C.W., Stritz, A.G., (1995). Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method, *Journal of Sound and Vibration*, **181**, 353-360.
- Kawakami, M., Sakiyama, T., Matsuda, H., Morita, C., (1995). In-plane and out-of-plane free vibrations of curved beams with variable sections, *Journal of Sound and Vibration*, **187**, 381-401.
- Lee, S.Y., Chao, J.C., (2000). Out-of-plane vibrations of curved non-uniform beams of constant radius, *Journal of Sound and Vibration*, **238**, 443-458.
- Laura, P.A.A., Maurizi, M.J., (1987). Recent research on vibrations of arch-type structures, *The Shock and Vibration Digest*, **19**, 6-9.
- Love, A.E.H., (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York, 4th edition.
- Markus, S., Nanasi, T., (1981). Vibration of Curved Beams, *The Shock and Vibration Digest*, **13**, 3-14.
- Rubin, M.B., (2000). *Cosserat Theories: Shells, Rods and Points*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Rubin, M.B., Tufekci, E., (2005). Three-dimensional free vibrations of a circular arch using the theory of a Cosserat point, *Journal of Sound and Vibration*, **286**, 799-816.
- Tarnopolskaya, T., De Hoog, F.R., Fletcher, N.H., Thwaites, S., (1996). Asymptotic analysis of the free vibrations of beams with arbitrarily varying curvature and cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, **196**, 659-680.
- Tarnopolskaya, T., De Hoog, F.R., Fletcher, N.H., (1999). Low-frequency mode transition in the free in-plane vibration of curved beams, *Journal of Sound and Vibration*, **228**, 69-90.
- Timoshenko, S., Goodier, J. N., (1951). *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., Tokyo, 2nd edition.
- Tufekci, E., Arpacı, A., (1998). Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects, *Journal of Sound and Vibration*, **209**, 845-856.
- Tufekci, E., (2001). Exact solution of free in-plane vibration of shallow circular arches, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **1**, 409-428.
- Tufekci, E., (2004). On finite-element formulation of geometrically exact three-dimensional beam theories based on interpolation of strain measures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 4067-4068.
- Volterra, E., Morell, J.D., (1961). Lowest natural frequency of elastic arc for vibrations outside the plane of initial curvature, *Journal of Applied Mechanics*, **28**, 624-627.
- Wang, T.M., Laskey, A., Ahmad, M., (1984). Natural frequencies for out-of-plane vibrations of continuous curved beams considering shear and rotatory inertia, *International Journal of Solids and Structures*, **20**, 257-265.
- Yang, Y.-B., Wu, C.-M., Yau, J.-D., (2001). Dynamic response of a horizontally curved beam subjected to vertical and horizontal moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, **242**, 519-537.
- Wang, T.M., Guilbert, M.P., (1982). Effects of rotatory inertia and shear on natural frequencies of continuous circular curved beams, *International Journal of Solids and Structures*, **17**, 281-289.
- Takahashi, S., (1962). Vibration of circular arch (Perpendicular to its plane), *Bulletin of the JSME*, **6** (24), 674-681.
- Suzuki, K., Aida, H., Takahashi, S., (1978). Vibration of curved bars perpendicular to their planes, *Bulletin of the JSME*, **21** (162), 1685-1695.