

# BE tabanlı öğrenme algoritması kullanarak görüntü parametrelerinin özyineli öğrenilmesi ve onarılması

**Faruk SARI\* , M. Ertuğrul ÇELEBİ**

*İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul*

## Özet

*Birçok klasik görüntü onarım tekniği bulanıklık işlevinin bilindiği varsayımı altında çalışır. Ancak, gerçek hayat problemlerinde sadece gözlem verisi elde edilebilmede bozucu sistemler hakkında yeterli bilgi sağlanamamaktadır. Bu yüzden görüntü onarımının ilk adımı bozucunun öğrenilmesi (tanınması) işlemidir. Geçmişte, görüntü ve bulanıklık parametrelerinin öğrenilmesi Enbüyük Olabilirlik (EO) problemi olarak ele alınmış ve Beklenti Enbüyükleme (BE) yordamı ile çözülmüştür. Özellikle BE yordamının E adımı kapalı yapıda bir çözüm bulunması bu yordamı daha cazip bir hale getirmektedir. Görüntü ve bulanıklık parametrelerinin tüm görüntü verisi kullanılarak öğrenilmesi geçmişte çalışılmış olmakla birlikte, parametrelerin yinelemeli BE'ye dayalı öğrenilmesi daha önce çalışılmamıştır. Yinelemeli teknikler dinamik işlem yetenekleri sayesinde tüm veri üzerinde işlem yapan yöntemlere nispetle çok daha az bellek ihtiyacı duyarlar. Daha az bellek ihtiyacı ise özellikle görüntü işleme alanında çok önemlidir. Bu çalışmada yeni bir eşzamanlı yinelemeli parametre öğrenme ve görüntü onarım yöntemi sunulmuştur. Dinamik Bayeşçi Ağ (DBA) yapısında yeni bir çözüm önerilmiştir. Sunulan yöntem EO parametre tanıma ve durum kestirimi için en iyi Kalman yumuşatma ifadelerini içerir. Kalman yumuşatma ifadelerinin yoğun hesaplama gerektirmesi sebebi ile Kalman süzgeç yaklaşıklığı kullanılmıştır. Aynı zamanda, onarılmış görüntü eş zamanlı olarak bu süzgeç çıkışından elde edilmektedir. Görüntü ve bulanıklık parametrelerinin BE öğrenme problemi kapalı yapıda çözümlenmesi başarılmıştır. Yöntemin başarımı gerçek görüntüler üzerinde yapılan benzetim ve denemeler ile verilmiştir.*

**Anahtar Kelimeler:** *Beklenti enbüyükleme, bulanıklık ve görüntü tanıma, yinelemeli işleme, kalman yumuşatma ve süzgeçleme.*

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Faruk SARI, faruk.sari@ctech.com.tr; Tel: (262) 644 90 48.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Programında tamamlanmış olan "Efficient Maximum Likelihood Parameter Learning: Image and Radar Applications" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 10.10.2006 tarihinde dergiye ulaşılmış, 09.01.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 01.02.2009 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Recursive learning of image parameters and restoration of images using EM based learning algorithm

### Extended abstract

*The image restoration problem can be defined as the general problem of estimating the ideal image from its blurred and noisy version. Many classical image restoration techniques have been reported under the assumption that the blur operation is exactly known. In real life applications, the corruption mechanism of any system is not known because only observed data is available, so it is necessary to handle uncertain events and observations.*

*The image restoration problem is in general ill-posed; a small perturbation on the given data produces large deviations in the solution. The direct inversion of the blur transfer function usually has a large magnitude at high frequencies, therefore excessive amplification of noise results at those frequencies. Clearly, this is not an acceptable solution for noisy images.*

*To overcome the noise sensitivity problem of the inverse filter, some filters have been developed based on the least-squares structure. The Wiener filter is based on batch processing which is usually implemented in the frequency domain. The Kalman filter is based on recursive processing which is usually implemented in the spatial domain. Both solutions only work when blur, image and noise parameters are known. The first step for image restoration is the identification of degradation. Consequently, modeling uncertain relationships among many kinds of variables and learning (identification) such variables are important topics.*

*The blur and image parameter identification problem was formerly formulated as a constrained Maximum Likelihood (ML) estimation procedure which was based on optimizing the probability density function (pdf) of the observed image with respect to the unknown parameters. But, the direct optimization of the likelihood function is not feasible, because of its highly nonlinear character.*

*The Expectation Maximization (EM) algorithm is a very popular and widely used algorithm for the computation of ML estimates. There are two steps in EM algorithm, as E (Expectation) and M (Maximization). The EM algorithm finds the conditional expectation of the log-likelihood of complete data*

*given the observed incomplete data. In the E-step, the conditional expectation of the “hidden variables” is calculated. In the M-step, this expectation is maximized with respect to the parameters. The advantage of the EM method is such that it avoids operating directly on the nonlinear likelihood function. The EM algorithm becomes more attractive if its maximization step can be formulated analytically.*

*Even though batch processing of the EM based blur identification and restoration problem needs large memory size, recursive techniques allow dynamic processing with modest storage requirements. Although the EM learning was applied to learning of unknown image and blur parameters based on batch image processing before, recursive EM learning of unknown image and blur parameters has not been studied as much as necessary.*

*Many time series models, including the Hidden Markov Models (HMM) and Kalman Filter Models (KFM) used in filtering and control applications, can be viewed as examples of Dynamic Bayesian Network DBNs. Since, a Bayesian Network is a graphical way to represent a particular factorization of joint distribution; we propose that state space image model can be represented as a DBN.*

*In this work, we introduce a new simultaneous recursive parameter learning and image restoration method based on the ML parameter identification and state estimation for images. We present a new formulation which is given in a Dynamic Bayesian Network (DBN) framework. We focus on the problem of learning the parameters of a Bayesian network. This technique incorporates optimal Kalman smoothing equations for ML parameter identification and state estimation. The use of Kalman filtering instead of Kalman smoothing is employed because of the computationally extensive processing of smoothing. In addition, a restored image is obtained simultaneously as the output of the Kalman filter. We manage to solve the EM learning problem for image and blur parameters in closed form. Although our proposed method processes huge data, because of the recursive structure it does not need large size storage. Performance evaluation of the method is given based on experiments carried out upon real images.*

**Keywords:** Expectation-Maximization, Blur and Image Identification, Recursive Processing, Kalman Smoothing and Filtering.

## Giriş

Birçok görüntü onarım tekniği bulanıklık işlevinin tam olarak bilindiği varsayımı ile çözülmektedir. Gerçek hayat problemlerinde ise herhangi bir sistemi bozan yapılar sadece gözlem verisine sahip olunması nedeni ile bilinemez. Bulanıklık ve görüntü parametrelerinin öğrenilmesi görüntü onarımının en önemli adımlarından biridir. Bulanıklık transfer işlevinin doğrudan tersi genelde yüksek frekanslı gürültü bileşenlerini kuvvetlendirir (Castleman, 1979). Doğal olarak bu kabul edilemez bir yaklaşımdır. Ters süzgecin gürültüye olan bu duyarlılığını aşabilmek için, en küçük kareler yaklaşımına dayalı bazı süzgeçler geliştirilmiştir. En yaygın olanlardan biri Wiener süzgeci tüm veriyi kullanarak işlem yapar ve genelde frekans düzleminde gerçekleştirilir. Bir diğeri, yinelemeli işleme dayalı Kalman süzgecidir (Mendel, 1995). Her iki süzgeç de bulanıklık, görüntü ve gürültü parametrelerinin bilinmesine ihtiyaç duyarlar. Bu sebeplerle bilinmeyen bu değişkenlerin öğrenilmesi oldukça önemlidir.

Geçmişte bulanıklık ve görüntü parametrelerinin tanınması, bilinmeyen parametrelere göre gözlem görüntüsünün olasılık yoğunluk işlevinin eniyilenmesine dayanan Enbüyük Olabilirlik (EO) kestirim problemi olarak ele alınmış (Lagendijk vd., 1988) ve görüntü/bulanıklık tanıma amaçlı farklı çözüm yaklaşımları ele alınmıştır (Lagendijk vd. 1990). Bunlardan başka aynı problem, yine EO problemi olarak ele alınmış ve oldukça etkili ve hızlı bir şekilde “Fisher Değerleme (Fisher Scoring)”’ye dayalı değiştirilmiş Newton eniyileme yöntemi ile çözülmüştür (Sarı, 2002). Ancak yöntemin doğrusal olmayan olabilirlik işlevi nedeni ile yakınsaması kararlı değildir. Bu sebeple Sarı ve Çelebi her bir dürüm adımında yakınsamayı garanti eden bir FS yöntemi sunmuşlardır (Sarı vd., 2004a).

Beklenti Enbüyükleme (BE) yordamı, EO kestirimlerinin hesaplanması için yaygın bir şekilde kullanılır. BE yordamının B (Beklenti) ve E (Enbüyükleme) şeklinde iki adımı vardır. B adımında, saklı değişkenlerin koşullu beklentisi hesaplanır. E adımında ise, bu beklenti parametrelere göre enbüyükleme yapılır. BE yordamında özellikle E adımının analitik olarak çözülebilmesi arzu edilir.

Ancak birçok pratik durumda, E adımının çözümü kapalı yapıda olası değil ya da etkin değildir (Lange, 1995). Önceki bir çalışmada, tüm görüntü verisi kullanılarak E adımında kapalı yapıda bir çözüm sunulmuştu (Sarı vd., 2005). Aynı zamanda kapalı yapı çözüm yanında E adımında eniyilemeye dayalı hızlandırılmış bir başka BE yöntemi de sunulmuştur (Sarı vd., 2004b).

BE tabanlı bulanıklık tanıma ve görüntü onarım problemi büyük hafıza boyutları gerektirmesine karşın, yinelemeli teknikler daha kabul edilir bellek gerektirmektedirler. Bilinmeyen bulanıklık ve görüntü parametrelerinin öğrenilmesi için BE öğrenme daha önce tüm veri üzerinden uygulanmış olmakla birlikte, yinelemeli işleme dayalı BE öğrenme yeterince ele alınmamıştır. Bu çalışmada, görüntüler üzerinde yeni bir eşzamanlı yinelemeli EO temelli parametre tanıma ve görüntü onarım yöntemi sunulmuştur. Görüntü durum uzay modeli, Dinamik Bayesçi Ağ (DBA) olarak ele alınmıştır. Önerdiğimiz yapı yinelemeli işlem yapabilmemesi nedeni ile büyük boyutlu görüntü verileri üzerinde işlem yapabilmeye olanağı sağlamaktadır. Bilinmeyen bulanıklık ve görüntü parametrelerinin EO kestirimlerinin eniyilenmesi için Kalman süzgeç yapıları kullanılmıştır. Bu amaçla özellikle Bayesçi ağ parametrelerinin öğrenilmesine odaklanılmıştır. Onarılmış görüntü Kalman süzgeç çıkışında eşzamanlı olarak elde edilmektedir.

## Görüntü ve gözlem modelleri

Özgün görüntü  $f(i, j)$ , 2-B’lu özbağlanımlı bir model olarak şu şekilde verilir:

$$f(i, j) = \sum_{k, l \in R_1} a(k, l) f(i - k, j - l) + v(i, j) \quad (1)$$

burada  $(i, j)$   $i$ . kolon ve  $j$ . satırı ve  $R_1$ ’de modelin destek bölgesini göstermektedir. (1) nolu eşitlik matris-vektör yapısı içinde

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{v} \quad (2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\mathbf{f}$  vektörü bilinmeyen özgün görüntüyü temsil eder. Modelleme hatası  $\mathbf{v}$ , tektürel Gauss dağılımlı beyaz gürültü

süreci olarak kabul edilmiştir. Gözlem görüntüsü  $g(i, j)$ ,

$$g(i, j) = \sum_{m, n \in R_2} d(m, n) f(i - m, j - n) + w(i, j) \quad (3)$$

şeklinde modellenebilir. Burada  $R_2$  bulanıklık destek bölgesini ve  $d(m, n)$  ise bulanıklık işlevini gösterir.  $w(i, j)$  bulanık görüntüyü bozan gözlem gürültüsüdür. Gözlem görüntüsü matris-vektör yapısında şu şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\mathbf{f} + \mathbf{w} \quad (4)$$

Burada  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{f}$ 'nin gürültülü ve bulanık sürümüdür. Gözlem gürültüsü  $\mathbf{w}$ , tektürel Gauss beyaz gürültü sürecidir.  $\mathbf{f}$  ve  $\mathbf{g}$ , sırasıyla  $(N^2 \times 1)$  özgül görüntü vektörü ve gözlem vektörüdür.  $\mathbf{A}$ ,  $(N^2 \times N^2)$  görüntü model katsayıları matrisi ve  $\mathbf{D}$ ,  $(N^2 \times N^2)$  bulanıklık model katsayıları matrisidir (Jain, 1989).

### Görüntü modelinin durum uzay gösterimi

Bir sistemin durumu, sistemin geçmiş davranışları üzerinden sistemin gelecekteki yanıtını tahmin edecek kadar gerekli olan bilgi miktarı olarak görülebilir (Gelb vd., 1974). Matris-vektör yapısı içinde, durum-uzay görüntü ve gözlem modeli şu şekilde yazılabilir (Woods vd., 1981).

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{A}\mathbf{f}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} \quad (5)$$

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{D}\mathbf{f}_k + \mathbf{w}_k \quad (6)$$

Burada  $\mathbf{f}_k$  ve  $\mathbf{g}_k$  sırasıyla  $p \times 1$  durum ve gözlem vektörleridir.  $\mathbf{A}$  durum geçiş matrisi ve  $\mathbf{D}$  gözlem matrisidir.  $\mathbf{v}_k$  ve  $\mathbf{w}_k$  sırası ile  $\mathbf{Q} = \sigma_v^2 \mathbf{I}$  ve  $\mathbf{R} = \sigma_w^2 \mathbf{I}$  ortak değişinti matrislerine sahip sıfır ortalamalı beyaz Gauss süreçleridir. Durum vektörü  $\mathbf{f}_k$ ,

$$\mathbf{f}_k = [f(i, j), f(i-1, j), \dots, f(1, j); f(L, j-1), f(L-1, j-1), \dots, f(1, j-1); \dots; f(L, j-M_1), f(L-1, j-M_1), \dots; \dots; \dots; f(i-M_2, j-M_1)]^T \quad (7)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Süzgeçleme ve kontrol uygulamalarında kullanılan Kalman Süzgeç modelleri de dahil olmak üzere birçok zaman serisi modeli, DBA'ların özel halleri olarak görülebilir (Murphy, 2002; Likas vd., 2004). Bir Bayesçi ağ, ortak dağılım işlevinin ayrıştırılmış grafiksel bir gösterimidir.

### Bilinmeyen görüntü parametrelerinin BE tabanlı öğrenilmesi

Sistemin bilinmeyenleri  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Q}$  ve  $\mathbf{R}$  matrislerinin bileşenleridir ve bilinmeyen parametre vektörü  $\boldsymbol{\theta}$ ,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M]^T \\ &= [\dots d(m, n) \dots \dots a(k, l) \dots \dots \sigma_v^2, \sigma_w^2]^T \quad (8) \\ &= [\mathbf{d}^T, \mathbf{a}^T, \sigma_v^2, \sigma_w^2]^T \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\mathbf{d}$ ,  $(L \times 1)$  boyutunda bilinmeyen bulanıklık parametre vektörü ve  $\mathbf{a}$ ,  $(K \times 1)$  boyutlu bilinmeyen görüntü parametre vektörüdür. BE yordamında, “eksiksiz veri” vektörü  $\mathbf{Y}$ , gözlem veri vektörü “eksik veri”  $\mathbf{G}$  ile aşağıda verilen türde bir ilişki tanımlanır:

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}(\mathbf{Y}) \quad (9)$$

Burada  $\mathbf{H}(\cdot)$  tersi alınamayan bir dönüşümdür.  $p_Y(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$  ve  $p_G(\mathbf{g}; \boldsymbol{\theta})$  sırası ile  $\mathbf{Y}$  ve  $\mathbf{G}$  vektörlerinin olasılık dağılım işlevleri olsun. Bu durumda, olabilirlik işlevi,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML, Y} = \arg \left\{ \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L_Y(\boldsymbol{\theta}) \right\} \quad (10)$$

şeklinde eniyilenebilir. BE yordamı temelde  $\Gamma(\boldsymbol{\theta})$  ile gösterilen logaritmik olabilirlik işlevinin koşullu beklentisi gözlenen eksik veriye bağlı olarak

$$\begin{aligned} \Gamma(\boldsymbol{\theta}) &= E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \log p_Y(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) | \mathbf{G} = \mathbf{g}; \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \\ &= E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ L_Y(\boldsymbol{\theta}) | \mathbf{G} = \mathbf{g}; \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

şeklinde hesaplanır (Dempster vd., 1977). Burada  $E_0 \{\bullet | \mathbf{g}\}$ , özel bir  $\theta$  değeri için verilen  $\mathbf{g}$ 'ye göre koşullu beklenti değeridir. (11) nolu eşitlik aynı zamanda BE yordamının B adımı olarak da anılır. BE yordamı dürümsel bir EO hesaplama yöntemi olduğundan yakınsama sağlanana dek adımlara devam edilir. Görüntü ve bulanıklık parametrelerinin tanınması işlemi E adımında gerçekleşirken gürültülü ve bulanık görüntünün onarılmış sürümü B adımında elde edilir. Eş zamanlı olarak tanıma ve onarım işleminin gerçekleştirilmesi için bu çalışmada  $\{\mathbf{g}\}$  eksik veri kümesi ve  $[\{\mathbf{f}\}\{\mathbf{g}\}]^T$  ise eksiksiz veri kümesi olarak ele alınmıştır.

### Yordamın B adımı

Eksiksiz veri  $\mathbf{Y}$ , yinelemeli işlemede şu şekilde verilir:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \{\mathbf{f}\} \\ \{\mathbf{g}\} \end{pmatrix} = (\mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_1^T \dots \mathbf{f}_N^T \quad \mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_2^T \dots \mathbf{g}_N^T)^T \quad (12)$$

Bileşik olasılık işlemi koşullu olasılıklar cinsinden ifade edilebilir. Sadece sistemin çıkışı gözlenebildiği için durum ve tüm gürültü değişkenleri saklıdır. Düzenlilik şartları altında Markov özellikleri Bayes kuralı içine yerleştirildiğinde,  $N$  ölçüm için ortak olasılık yoğunluk işlemi koşullu olasılıklar cinsinden aşağıdaki şekilde verilir (Smyth vd., 1997) (Cramér, 1946).

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta) = p(\mathbf{f}_0; \theta) \prod_{k=1}^N p(\mathbf{f}_k | \mathbf{f}_{k-1}; \theta) \prod_{k=1}^N p(\mathbf{g}_k | \mathbf{f}_k; \theta) \quad (13)$$

Logaritmik olabilirlik işlemi  $L_{\mathbf{Y}}(\theta)$ ,

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{Y}}(\theta) &= \log p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta) \\ &= \log p_{\mathbf{F}_0}(\mathbf{f}_0; \theta) + \log p_{\mathbf{F}_k | \mathbf{F}_{k-1}}(\mathbf{f}_k | \mathbf{f}_{k-1}; \theta) \\ &\quad + \log p_{\mathbf{G}_k | \mathbf{F}_k}(\mathbf{g}_k | \mathbf{f}_k; \theta) \end{aligned} \quad (14)$$

olarak ifade edilir. Başlangıç durumu  $\mathbf{f}_0$ ,  $(\boldsymbol{\mu}_0)$  ortalama ve tekil olmayan ortak değişinti matrisi

$(\mathbf{M}_0)$ 'ne sahiptir. Logaritmik olabilirlik işlemi  $L_{\mathbf{Y}}(\theta)$ ;

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{Y}}(\theta) &= c - \frac{1}{2} \left\{ \log |\mathbf{M}_0| + (\mathbf{f}_0 - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathbf{M}_0^{-1} (\mathbf{f}_0 - \boldsymbol{\mu}_0) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \log |\mathbf{Q}| + (\mathbf{f}_k - \mathbf{A}\mathbf{f}_{k-1})^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{f}_k - \mathbf{A}\mathbf{f}_{k-1}) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \log |\mathbf{R}| + (\mathbf{g}_k - \mathbf{D}\mathbf{f}_k)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{g}_k - \mathbf{D}\mathbf{f}_k) \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $c$ ,  $\theta$ 'dan bağımsız sabit bir değişkendir ve  $|\bullet|$ , bir matrisin determinantını gösterir. EO görüntü ve bulanıklık tanıma problemi (15) nolu ifadenin negatifi alınarak bir enküçükleme problemi olarak ele alınabilir. B adımındaki  $\Gamma(\theta)$  işlemi,

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta) &= - \left\{ c - \frac{1}{2} \log |\mathbf{M}_0| - \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \mathbf{M}_0^{-1} (\mathbf{M}_{0|N} + \boldsymbol{\mu}_{0|N} \boldsymbol{\mu}_{0|N}^T) \right] \right. \\ &\quad + \boldsymbol{\mu}_{0|N}^T \mathbf{M}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{M}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \log |\mathbf{Q}| \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{M}_{k|N} + \boldsymbol{\mu}_{k|N} \boldsymbol{\mu}_{k|N}^T) \right] \\ &\quad + \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{M}_{k-1, k|N} + \boldsymbol{\mu}_{k-1|N} \boldsymbol{\mu}_{k|N}^T) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{M}_{k-1|N} + \boldsymbol{\mu}_{k-1|N} \boldsymbol{\mu}_{k-1|N}^T) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \log |\mathbf{R}| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_k^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}_k + \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_k^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D} \boldsymbol{\mu}_{k|N} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N \mathbf{D}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{M}_{k|N} + \boldsymbol{\mu}_{k|N} \boldsymbol{\mu}_{k|N}^T) \right] \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $\text{tr}\{\bullet\}$  bir matrisin "iz" işlevini gösterir.  $\boldsymbol{\mu}_{k|N}$  ve  $\mathbf{M}_{k|N}$  ise sırası ile verilen  $\mathbf{g}$  gözlemi altında koşullu ortalama ve koşullu ortak değişinti ifadeleridir.  $\mathbf{M}_{k-1, k|N}$  ise iki zaman adımı arasındaki ortak değişinti işlemidir. (16) nolu ifadede ilgili tanımlamalar aşağıda verilmiştir.

$$\hat{\mathbf{f}}_k = \boldsymbol{\mu}_{k|N} = E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \mathbf{f}_k \mid \mathbf{g} \right\} \quad (17)$$

$$\mathbf{M}_{k|N} = E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \left( \mathbf{f}_k - \boldsymbol{\mu}_{k|N} \right) \left( \mathbf{f}_k - \boldsymbol{\mu}_{k|N} \right)^T \mid \mathbf{g} \right\} \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_{k-1,k|N} = E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \left( \mathbf{f}_{k-1} - \boldsymbol{\mu}_{k-1|N} \right) \left( \mathbf{f}_k - \boldsymbol{\mu}_{k|N} \right)^T \mid \mathbf{g} \right\} \quad (19)$$

$$E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \mathbf{f}_k \mathbf{f}_k^T \mid \mathbf{g} \right\} = \mathbf{M}_{k|N} + \boldsymbol{\mu}_{k|N} \boldsymbol{\mu}_{k|N}^T \quad (20)$$

$\boldsymbol{\mu}_{k|N}$ ,  $\mathbf{M}_{k|N}$  ve  $\mathbf{M}_{k-1,k|N}$ 'nin hesaplanması doğrusal eniyi yumuşatma yöntemlerinden biri kullanılarak çözümlenebilir (Moheimani vd., 1998). Etkili yumuşatma yordamları Kalman süzgeçleme ve yumuşatma ifadelerinin ortak bir şekilde dürümsel kullanımı ile çözümlenebilir.

#### Kalman yumuşatma yordamı ve görüntülerin onarımı

$\boldsymbol{\mu}_{k|N}$ ,  $\mathbf{M}_{k|N}$  ve  $\mathbf{M}_{k-1,k|N}$ 'in hesaplanması  $\mathbf{g}_1$ 'den  $\mathbf{g}_k$ 'ya gözlemleri kullanan bir ileri özyineleme ve  $\mathbf{g}_N$ 'den  $\mathbf{g}_{k+1}$ 'e kadar gözlemleri kullanan geri özyineleme kısımlarından oluşan Kalman yumuşatma yöntemi kullanılarak çözümlenebilir. İleri yönlü kısım iyi bilinen Kalman süzgeç ifadeleri ile hesaplanırken geri yönlü kısım Rauch (1963) özyineleme yardımı ile hesaplanır. Sözkonusu ileri-geri yönde özyineleme yöntemi Rauch-Tung-Streibel (RTS) yumuşatıcı olarak bilinir (Anderson vd., 1979). Bu eşitlikler bir ileri Kalman süzgeç yinelemesini bir Kalman yumuşatma sürecinin izlediği yapıda çözümler. Standart Kalman süzgeç ifadeleri ve RTS yineleme yapısı sırasıyla Ek A ve Ek B'de verilmiştir. Kalman yumuşatma yapısının uygulanması, karmaşık yapısı yüzünden oldukça zordur. Tam yumuşatma yerine süzgeçleme yaklaşımı kullanılarak hesaplama yükü azaltılabilir (Gannot vd., 1998). Kullanılan bu yaklaşım ile birlikte,  $\boldsymbol{\mu}_{k|N}$  ve  $\mathbf{M}_{k|N}$  yerine sırasıyla  $\hat{\mathbf{f}}_k$  ve  $\mathbf{M}_{k|k}$  kullanılmıştır. Burada  $\hat{\mathbf{f}}_k$  aynı zamanda onarılmış

görüntüyü ifade etmektedir. Bu değişikliklerden sonra,  $\mathbf{M}_{k-1,k|N}$  şu şekilde bulunmuştur.

$$\mathbf{M}_{k-1,k|N} = \mathbf{M}_{k-1|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{D})^T \mathbf{A}^T \quad (21)$$

Burada  $\mathbf{I}$  birim matris ve  $\mathbf{K}_k$  ise Kalman kazancını göstermektedir. (21) nolu eşitliğin türetilmesi Ek C'de verilmiştir.

#### Yordamın E adımı

$\Gamma(\boldsymbol{\theta})$ 'nin  $\theta_i$  değişkenine göre türevi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} &= E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log p_Y(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) \mid \mathbf{g}; \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \mathbf{M}_0^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_0}{\partial \theta_i} + \left( \mathbf{M}_{0|N} + \boldsymbol{\mu}_{0|N} \boldsymbol{\mu}_{0|N}^T \right) \frac{\partial \mathbf{M}_0^{-1}}{\partial \theta_i} \right] \\ &\quad - \boldsymbol{\mu}_{0|N}^T \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \mathbf{M}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{M}_0^{-1} \boldsymbol{\mu}_0 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \theta_i} + \left( \mathbf{M}_{k|N} + \boldsymbol{\mu}_{k|N} \boldsymbol{\mu}_{k|N}^T \right) \frac{\partial \mathbf{Q}^{-1}}{\partial \theta_i} \right] \\ &\quad - \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N \left( \mathbf{M}_{k-1,k|N} + \boldsymbol{\mu}_{k-1|N} \boldsymbol{\mu}_{k|N}^T \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N \left( \mathbf{M}_{k-1|N} + \boldsymbol{\mu}_{k-1|N} \boldsymbol{\mu}_{k-1|N}^T \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_i} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_k^T \frac{\partial \mathbf{R}^{-1}}{\partial \theta_i} \mathbf{g}_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_k^T \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D} \right) \boldsymbol{\mu}_{k|N} \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N \left( \mathbf{M}_{k|N} + \boldsymbol{\mu}_{k|N} \boldsymbol{\mu}_{k|N}^T \right) \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \mathbf{D}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D} \right) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

şeklinde verilir. Aranılan bulanıklık, görüntü model parametreleri, model ve gözlem gürültü değerleri  $\Gamma(\boldsymbol{\theta})$ 'nin bilinmeyenlere göre kısmi türevlerinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile bulunur.

Görüntü model parametreleri için,  $\mathbf{A}$  matrisine göre türev ifadesi;

$$\frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{A}} = -\frac{\partial \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N (\mathbf{M}_{k-1, k|N} + \boldsymbol{\mu}_{k-1|N} \boldsymbol{\mu}_{k|N}^T) (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}) \right]}{\partial \mathbf{A}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N (\mathbf{M}_{k-1|N} + \boldsymbol{\mu}_{k-1|N} \boldsymbol{\mu}_{k-1|N}^T) (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}) \right]}{\partial \mathbf{A}} \quad (23)$$

şeklinde hesaplanır. Buradan (23) nolu eşitliğin 0' a eşitlenmesi ile,

$$\mathbf{A}^{new} = \left( \sum_{k=1}^N E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \mathbf{f}_{k-1} \mathbf{f}_k^T \mid \mathbf{g} \right\} \right) \left[ \sum_{k=1}^N E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \mathbf{f}_{k-1} \mathbf{f}_{k-1}^T \mid \mathbf{g} \right\} \right]^{-1} \quad (24)$$

bulunur.

Bulanıklık parametreleri için  $\mathbf{D}$  matrisine göre türev ifadesi (25) nolu eşitlikte ve 0'a eşitlenmesi ile bulunan yeni bulanıklık matrisi ise (26) nolu eşitlikte verilmiştir.

$$\frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{D}} = -\sum_{k=1}^N \mathbf{g}_k^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\mu}_{k|N} + \frac{1}{2} \frac{\partial \text{tr} \left[ \sum_{k=1}^N (\mathbf{M}_{k|N} + \boldsymbol{\mu}_{k|N} \boldsymbol{\mu}_{k|N}^T) (\mathbf{D}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}) \right]}{\partial \mathbf{D}} \quad (25)$$

$$\mathbf{D}^{new} = \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\mu}_{k|N} \right) \left[ \sum_{k=1}^N E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \mathbf{f}_k \mathbf{f}_k^T \mid \mathbf{g} \right\} \right]^{-1} \quad (26)$$

Çıkış gürültüsünün ortak değişinti işlevi için  $\mathbf{R}$  matrisine göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\mathbf{R}^{new} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \mathbf{g}_k \mathbf{g}_k^T - 2 \mathbf{D}^{new} \boldsymbol{\mu}_{k|N} \mathbf{g}_k^T + \mathbf{D}^{new} E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \mathbf{f}_k \mathbf{f}_k^T \mid \mathbf{g} \right\} (\mathbf{D}^{new})^T \right] \quad (27)$$

ifadesi elde edilir.

Model gürültü ortak değişintisi,  $\mathbf{Q}$  matrisine göre uyarlandığında ise,

$$\mathbf{Q}^{new} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \mathbf{f}_k \mathbf{f}_k^T \mid \mathbf{g} \right\} - 2 \mathbf{A}^{new} E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \mathbf{f}_{k-1} \mathbf{f}_k^T \mid \mathbf{g} \right\} + \mathbf{A}^{new} E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \mathbf{f}_{k-1} \mathbf{f}_{k-1}^T \mid \mathbf{g} \right\} (\mathbf{A}^{new})^T \right] \quad (28)$$

şeklinde bulunur.

Başlangıç ortalama değeri için türev ifadeleri çözüldüğünde,

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \boldsymbol{\mu}_{0|N} = \hat{\mathbf{f}}_0 \quad (29)$$

elde edilir. Başlangıç ortak değişinti ifadeleri için ise,

$$\mathbf{M}_0 = E_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \mathbf{f}_0 \mathbf{f}_0^T \mid \mathbf{g} \right\} - \boldsymbol{\mu}_{0|N}^T \boldsymbol{\mu}_{0|N} = \mathbf{M}_{0|N} \quad (30)$$

elde edilir.

Yukarıda verilen türev ifadelerinde gerekli olan eşitlikler Ek. D'de verilmiştir.

## Deneysel sonuçlar

Deneysel sonuçlar 64x64 boyutundaki bulanık ve gürültülü "Lena" görüntüleri üzerinden elde edilmiştir. Özgün görüntü suni olarak (3x3) nedensel nokta yayılım işlevi ile bulandırılmış ve toplamsal Gauss gürültüsü eklenmiştir. Hesaplama yükünü azaltmak için bulanıklık işlevinin gerçel ve simetrik olduğu kabul edilmiştir. Bulanıklık parametreleri aşağıdaki şekilde seçilmiştir.

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \\ d_7 & d_8 & d_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(0,0) & d(1,0) & d(2,0) \\ d(0,1) & d(1,1) & d(2,1) \\ d(0,2) & d(1,2) & d(2,2) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.075 & 0.12 & 0.075 \\ 0.12 & 0.22 & 0.12 \\ 0.075 & 0.12 & 0.075 \end{bmatrix}$$

Bulanık görüntü aşağıdaki ifadede verildiği şekilde elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
 g(i, j) = & d_1 f(i, j) + d_2 f(i-1, j) + d_3 f(i-2, j) \\
 & + d_4 f(i, j-1) + d_5 f(i-1, j-1) + d_6 f(i-2, j-1) \\
 & + d_7 f(i, j-2) + d_8 f(i-1, j-2) + d_9 f(i-2, j-2) \\
 & + w(i, j)
 \end{aligned} \quad (32)$$

Görüntü modeli (33) nolu eşitlikte verildiği gibi birinci derece simetrik olmayan yarı düzlem özbağlanımlı yapı olarak kabul edilmiştir.

$$\begin{aligned}
 f(i, j) = & a_{11} f(i-1, j-1) + a_{01} f(i, j-1) \\
 & + a_{-11} f(i+1, j-1) + a_{10} f(i-1, j) + v(i, j)
 \end{aligned} \quad (33)$$

burada  $a_{k,l}$  simetrik olmayan yarı düzlem özbağlanımlı model katsayılarıdır ve  $\sum_{k,l \in W_A} a(k,l) \leq 1$  dir. Durum vektörü hem görüntü

hem de bulanıklık model destek bölgelerini kapsamalıdır bu durumda en küçük durum vektör boyutu (130x1) olacaktır.

Elde edilen onarım sonuçları Sinyal Gürültü Oranı (SGO)'daki iyileşme ile ifade edilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$SNR_{imp} = 10 \log_{10} \frac{\sum_{i,j}^N (f(i, j) - g(i, j))^2}{\sum_{i,j}^N \left( f(i, j) - \hat{f}(i, j) \right)^2} \quad (34)$$

burada  $\hat{f}(i, j)$  onarılmış görüntüyü gösterir. Parametrelerin öğrenilmesi başarımlı ise her adımda Karesel Ortalama Hata (KOH) değeri ile belirlenir ve  $i$ . adımda

$$MSE(i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \theta(i) - \hat{\theta}(i) \right]^2 \quad (35)$$

tanımlanır. Burada  $\theta(i)$  mevcut çıkış değeri ve  $\hat{\theta}(i)$  'de kestirilmiş çıkış değeridir.

BE yordamı bilinmeyen parametrelerin kestirimi için başlangıç değerlerine ihtiyaç duyar. Bulanıklık başlangıç değerleri için bulanıklık işlevinin görüntü üzerinde oluşturduğu alçak geçi-

ren süzgeç etkisi dikkate alınabilir. Ayrıca görüntü sistemlerinin enerjiyi yutma ve üretme etkilerinin olmadığı göz önüne alındığında  $\sum_{m,n \in W_D} d(m,n) = 1$  olacağı açıktır. Bizim çalış-

mamızda tüm bulanıklık değerleri eşit kabul edilmişlerdir. Başlangıç görüntü model katsayıları olarak En Küçük Kareler (EKK) yöntemi ile gürültülü ve bulanık görüntüden kestirilen değerler kullanılmıştır.

BE yordamı kullanılarak elde edilen bulanıklık ve görüntü model parametreleri sırası ile Tablo 1 ve Tablo 2'de verilmiştir. Farklı SGO'ları için iyileşme oranları, ideal ve kestirilmiş değerler için hesaplanmış ve Şekil 1'de verilmiştir. Şekil 2'de ise özgün, bulanık-gürültülü ve öğrenilen parametreler ile onarılmış görüntüler verilmiştir.

Tablo 1. Farklı SGO'larda bulanıklık parametreleri

Özgün değerler	$d_5 = 0.22$	$d_6 = 0.12$	$d_6 = 0.075$
Başlangıç değerleri	0.111	0.111	0.111
Kestirilmiş değerler	$\hat{d}_5$	$\hat{d}_6$	$\hat{d}_9$
60 dB	0.2214	0.1217	0.0729
40 dB	0.2231	0.1219	0.0723
30 dB	0.2252	0.1223	0.0714
20 dB	0.2464	0.1231	0.0653
10 dB	0.2632	0.1235	0.0607

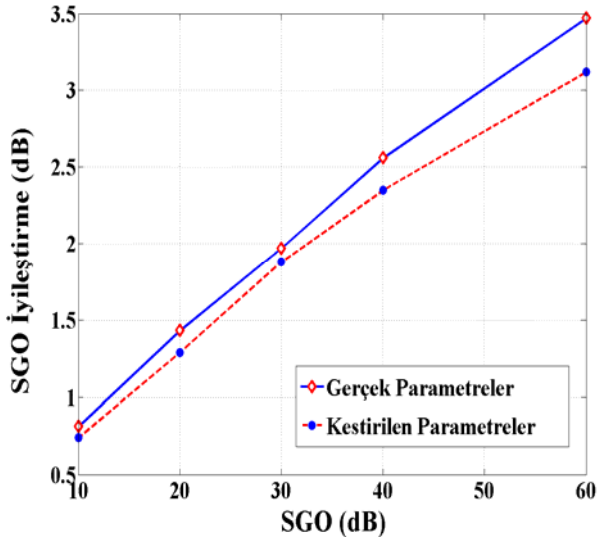
$\mathbf{d}$  ve  $\hat{\mathbf{d}}$ , değerleri arasındaki ve  $\mathbf{a}$  ile  $\hat{\mathbf{a}}$  arasındaki KOH değerleri hesaplanmış ve sırası ile durum sayısının işlevi olarak Şekil 3 ve 4'de gösterilmiştir.

BE yordamı yakınsama sağlanana dek devam ettirilir. Bu çalışmada, mevcut düremde elde edilen değer ile bir önceki düremde elde edilen değer arasındaki fark eşik değer olarak belirlenen  $\varepsilon=0.0001$  değerden daha küçük olduğu durumda BE yordamı sonlandırılmıştır.



Tablo 2. Kestirilmiş görüntü model katsayıları

	$a_{1,1}$	$a_{1,0}$	$a_{-1,1}$	$a_{0,1}$
Özgün görüntüden kestirilmiş	-0.1434	0.1395	0.5215	0.4782
Gözlem üzerinden kestirilen başlangıç değerleri	-0.5224	0.2961	0.3475	0.8767
60 dB	-0.1705	0.1641	0.3974	0.5342
40 dB	-0.1839	0.1679	0.4123	0.5734
30 dB	-0.2163	0.1711	0.4213	0.6274
20 dB	-0.2345	0.1807	0.4392	0.6843
10 dB	-0.2934	0.1985	0.4621	0.7115

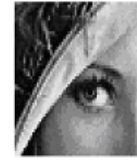


Şekil 1. İdeal ve kestirilmiş değerler için SGO iyileştirme değerleri

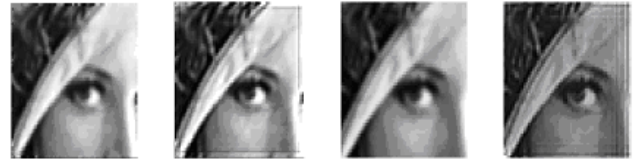
## Sonuç

Bu çalışmada EO bulanıklık ve görüntü tanıma problemi için, yeni eşzamanlı yinelemeli parametre öğrenme ve görüntü onarım yöntemi sunulmuştur. Görüntü ve bulanıklık parametrelerinin BE öğrenme problemi kapalı yapıda çözülmüştür. Sunulan yöntem EO parametre tanıma ve durum kestirimi için Kalman yumuşatma ifadelerini içerir. Kalman yumuşatma ifadeleri yerine daha az hesaplama gerektiren Kalman süz

geç yaklaşıklığı kullanılmıştır. Yöntemin en önemli avantajı tek bir yapı içinde görüntü parametrelerini öğrenir ve onarım yapar. Onarılmış görüntü eş zamanlı olarak Kalman süzgeç çıkışı olarak elde edilmektedir. Özyinelemeli yapı sayesinde büyük boyutlu veriler üzerinde işlem yapmak olası hale gelmiştir. Sunulan yöntemin yoğun hesaplama yükü, azaltılmış güncellenmiş Kalman süzgeçleri ya da azaltılmış model dereceli Kalman süzgeçleri kullanılarak azaltılabilir (Angwin vd., 1989).



(a)

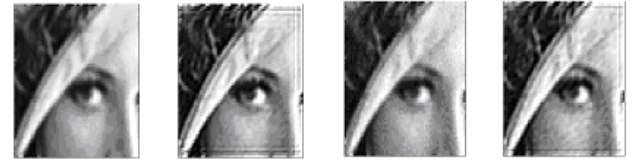


(b)

(c)

(d)

(e)



(f)

(g)

(h)

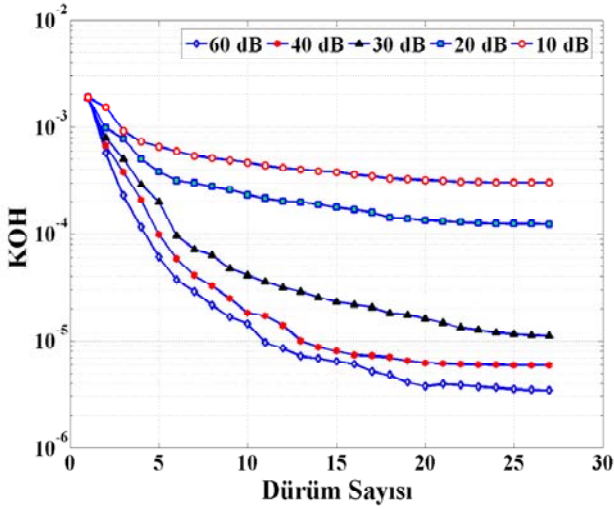
(i)



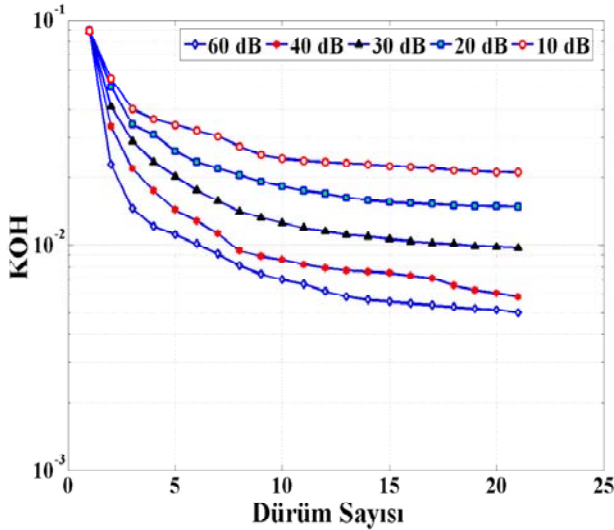
(j)

(k)

Şekil 2. (a) Özgün  $64 \times 64$  Lena; (b) Bulanık ve gürültülü  $SNR=60dB$ ; (c) Onarılmış  $SNR_{imp} = 3.18 dB$ .; (d) Bulanık ve gürültülü  $SNR=40 dB$ .; (e) Onarılmış  $SNR_{imp} = 2.32 dB$ .; (f) Bulanık ve gürültülü  $SNR=30 dB$ .; (g) Onarılmış  $SNR_{imp} = 1.81 dB$ .; (h) Bulanık ve gürültülü  $SNR=20 dB$ .; (i) Onarılmış  $SNR_{imp} = 1.29 dB$ .; (j) Bulanık ve gürültülü  $SNR=10 dB$ .; (k) Onarılmış  $SNR_{imp} = 0.61 dB$ .



Şekil 3.  $d$  ve  $\hat{d}$  arasındaki KOH



Şekil 4.  $a$  ve  $\hat{a}$  arasındaki KOH

## Kaynaklar

- Anderson, B.D.O., Moore, J.B., (1979). *Optimal filtering*, Prentice Hall, New Jersey.
- Angwin, D. L., Kaufman H., (1989). Image restoration using reduced order models, *Signal Processing*, **16**, 21-28.
- Castleman, K. R., (1979). *Digital Image Processing*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Cramér, H., (1946). *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Dempster, A.P., Laird, N. M., Rubin, D.B., (1977). Maximum likelihood from incomplete via the EM algorithm, *J. Royal Stat. Soc.*, **39**, 1-38.

- Gannot, S., Burshtein D., Weinstein E., (1998). Iterative and sequential Kalman filter-based speech enhancement algorithms, *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, **6**, 373-385.
- Gelb, A., Kasper, J. F., Nash, R. A., Sutherland, C. A., (1974). *Applied Optimal Estimation*, The Analytic Sciences Corporation, The M.I.T. Press, Cambridge.
- Jain, A. K., (1989). *Fundamentals of digital image processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Lagendijk, R.L., Katsaggelos, A.K. ve Biemond J., (1988). Iterative identification and restoration of images, *Proceedings, IEEE Int. Conf. On Acoustics, Speech and Signal Processing*, New York, NY, April, 992-995.
- Lagendijk, R.L., Tekalp, A.M. ve Biemond, J., (1990). Maximum likelihood image and blur identification : a unifying approach, *Optical Engineering*, **29**, 5, 422-435.
- Lange, K., (1995). A gradient algorithm locally equivalent to the EM algorithm, *Journal of Royal Statistics Soc. B*, **57**, 2, 425-437.
- Likas, A.C., Galatsanos, N. P., (2004). A variational approach for Bayesian blind image deconvolution, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **52**, 8, 2222-2233.
- Mendel, J. M., (1995). *Lessons in Estimation Theory for Signal Processing*, Communications and Control, Prentice-Hall, New Jersey.
- Moheimani, S. O. R., Savkin, A. V., Petersen, I. R., (1998). Robust filtering, prediction, smoothing, and observability of uncertain systems, *IEEE Transactions On Circuits And Systems—I: Fundamental Theory And Applications*, **45**, 4, 446-457.
- Murphy, K., (2002). Dynamic Bayesian networks: representation, inference and learning, Ph.D. Thesis, UC Berkeley, Computer Science Division.
- Rauch, H. E., (1963). Solutions to the linear smoothing problem, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **8**, 371-372.
- Sarı, F., (2002). Newton type optimization for ML blur identification and restoration, *Proceeding, IEEE Int. Conf. On Acoustics, Speech and Signal Processing*, Orlando, Florida, May, 3716-3719.
- Sarı, F., Çelebi, M.E., (2004a). A new trust region fisher scoring optimization for image and blur identification, *Proceeding, 12th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Vienna, Austria, September, 505-508.

Sarı F., Çelebi, M.E., (2004b). A new accelerated EM based learning of the image parameters and restoration, *Proceeding*, IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN), Budapest, Hungary, July, 2513 – 2518.

Sarı, F., Çelebi M.E., (2005). EM based learning for image restoration: a closed form solution, *Proceeding*, IEEE 13th Signal Processing and Communications Applications Conference, 16-18 May, Kayseri, Turkey.

Smyth, P., Heckerman, D., Jordan, M. I., (1997). Probabilistic independence networks for hidden Markov probability models, *Neural Computation*, **9**, 227-269.

Woods, J.W., Ingle, V.K., (1981). Kalman filtering in two dimensions: further results, *IEEE Trans. on ASSP*, **29**, 188-197.

### Ek A : Kalman süzgeç eşitlikleri

Standart Kalman yordamı yinelemeli olarak zamanla değişen parametre vektörlerinin kestirimlerini üretir. Öngörü eşitlikleri aşağıda verilmiştir.

$$\boldsymbol{\mu}_{k|k-1} = \hat{\mathbf{f}}_{k|k-1} = E[\mathbf{f}_k | \mathbf{g}] = \mathbf{A}\hat{\mathbf{f}}_{k-1} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{M}_{k|k-1} = \mathbf{A}\mathbf{M}_{k-1|k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (\text{A.2})$$

Süzgeç eşitlikleri

$$\hat{\mathbf{f}}_k = \hat{\mathbf{f}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k [\mathbf{g}_k - \mathbf{D}\hat{\mathbf{f}}_{k|k-1}] \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{M}_{k|k-1}\mathbf{D}^T [\mathbf{D}\mathbf{M}_{k|k-1}\mathbf{D}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{M}_{k|k} = \mathbf{M}_{k|k-1} - \mathbf{M}_{k|k-1}\mathbf{D}^T [\mathbf{D}\mathbf{M}_{k|k-1}\mathbf{D}^T + \mathbf{R}]^{-1} \mathbf{D}\mathbf{M}_{k|k-1} \quad (\text{A.5})$$

şeklinde verilir. Burada  $\hat{\mathbf{f}}_k$ ,  $\mathbf{f}_k$ 'nin kestirimidir ve  $\mathbf{K}_k$  ise Kalman kazanç matrisidir.  $\mathbf{M}_{k|k-1}$  ve  $\mathbf{M}_{k|k}$  sırasıyla öngörü ve süzgeç hata ortak değişinti matrisleridir ve

$$\mathbf{M}_{k|k-1} = E\left\{\left(\mathbf{f}_k - \hat{\mathbf{f}}_{k|k-1}\right)\left(\mathbf{f}_k - \hat{\mathbf{f}}_{k|k-1}\right)^T\right\} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{M}_{k|k} = E\left\{\left(\mathbf{f}_k - \hat{\mathbf{f}}_k\right)\left(\mathbf{f}_k - \hat{\mathbf{f}}_k\right)^T\right\} \quad (\text{A.7})$$

şekilde tanımlanırlar.

### Ek B : RTS özyineleme

İleri süzgeç eşitlikleri,  $k = 1, 2, \dots, N$  için Kalman eşitlikleri ile aynıdır.  $k = N, N-1, \dots, 1$  için geri yönde yumuşatma eşitlikleri aşağıda tanımlanan  $\boldsymbol{\mu}_{k-1|N}$  ve  $\mathbf{M}_{k-1|N}$  eşitlikleri ile hesaplanır.

$$\boldsymbol{\mu}_{k-1|N} = \hat{\mathbf{f}}_{k-1} + \mathbf{S}_{k-1} [\boldsymbol{\mu}_{k-1|N} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{f}}_{k-1}] \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{M}_{k-1|N} = \mathbf{M}_{k-1|k-1} - \mathbf{S}_{k-1} [\mathbf{M}_{k|N} - \mathbf{M}_{k|k-1}] \mathbf{S}_{k-1}^T \quad (\text{B.2})$$

burada  $\mathbf{S}_{k-1}$ ,

$$\mathbf{S}_{k-1} = \mathbf{M}_{k-1|k-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}_{k|k-1}^{-1} \quad (\text{B.3})$$

şeklinde tanımlanır.

### Ek C: Eşitlik (21)'in türetilmesi

$$\mathbf{M}_{k-1,k|N} = E_{\theta} \left\{ \left( \mathbf{f}_{k-1} - \boldsymbol{\mu}_{k-1|N} \right) \left( \mathbf{f}_k - \boldsymbol{\mu}_{k|N} \right)^T \right\} \quad (\text{C.1})$$

$\mathbf{M}_{k-1,k|N}$ 'i aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\mathbf{M}_{k-1,k|N} = E_{\theta} \left\{ \left( \mathbf{f}_{k-1} - \hat{\mathbf{f}}_{k-1} \right) \left( \mathbf{f}_k - \left( \hat{\mathbf{f}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k [\mathbf{g}_k - \mathbf{D}\hat{\mathbf{f}}_{k|k-1}] \right) \right)^T \right\} \quad (\text{C.2})$$

Eğer (5) ve (6), (C-2) ifadesi içine yerleştirilirse

$$\mathbf{M}_{k-1,k|N} = E_{\theta} \left\{ \tilde{\mathbf{f}}_{k-1} \left( \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{D}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}}_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{D}\mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{w}_k \right)^T \right\} \quad (\text{C.3})$$

ifadesi elde edilir. Burada  $\tilde{\mathbf{f}}_{k-1} = \mathbf{f}_{k-1} - \hat{\mathbf{f}}_{k-1}$ 'dir.

$$\mathbf{M}_{k-1,k|N} = E_{\theta} \left\{ \tilde{\mathbf{f}}_{k-1} \tilde{\mathbf{f}}_{k-1}^T \right\} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{D})^T \mathbf{A}^T \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{M}_{k-1,k|N} = \mathbf{M}_{k-1|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{D})^T \mathbf{A}^T \quad (\text{C.5}) \quad \frac{\partial(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})}{\partial\sigma_v^2} = -\frac{1}{(\sigma_v^2)^2} \mathbf{A} \quad (\text{D.7})$$

**Ek D: Gerekli türev ifadeleri**

$$\frac{\partial(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D})}{\partial d(m,n)} = \mathbf{R}^{-T} \mathbf{E}_{m,n} \quad (\text{D.1}) \quad \frac{\partial(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D})}{\partial\sigma_w^2} = -\frac{1}{(\sigma_w^2)^2} \mathbf{D} \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{\partial(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})}{\partial a(k,l)} = \mathbf{Q}^{-T} \mathbf{E}_{k,l} \quad (\text{D.2}) \quad \frac{\partial}{\partial\sigma_v^2} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}) = -\frac{1}{(\sigma_v^2)^2} (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial d(m,n)} (\mathbf{D}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}) = \mathbf{E}_{m,n}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}_{m,n} \quad (\text{D.3}) \quad \frac{\partial}{\partial\sigma_w^2} (\mathbf{D}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}) = -\frac{1}{(\sigma_w^2)^2} (\mathbf{D}^T \mathbf{D}) \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial a(k,l)} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}) = \mathbf{E}_{k,l}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{E}_{k,l} \quad (\text{D.4})$$

$\mathbf{E}_{i,j}$  blok-Toeplitz matris yapısında  $(i,j)$ , elemanı 1 olan diğer elemanların hepsi 0 olan bir matrisdir.

$$\frac{\partial\mathbf{Q}^{-1}}{\partial\sigma_v^2} = -\frac{1}{(\sigma_v^2)^2} \mathbf{I}, \quad \frac{\partial\mathbf{R}^{-1}}{\partial\sigma_w^2} = -\frac{1}{(\sigma_w^2)^2} \mathbf{I} \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\sigma_v^2} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\sigma_w^2} = \mathbf{I} \quad (\text{D.6})$$