

Dönüşümsel yüksek boyutlu model gösterilimi tabanlı yeni oransal yaklaşımların oluşturumu ve LSI sistemlerdeki uygulamaları

İrem YAMAN*, Metin DEMİRALP

İTÜ Bilişim Enstitüsü, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Oransal yaklaştırım yöntemlerinin, tek veya çok değişkenli fonksiyonlardaki doğrusal olmama durumlarının veya tekilliklerin üstesinden gelmede kullanılan en etkin ve oluşturulması en kolay yaklaştırım yöntemleri olduğu söylenebilir. Bu yöntemler, çok değişkenli, doğrusal öteleme altında değişmeyen sistemlerdeki (ing: Multidimensional Linear Shift Invariant-LSI recursive systems) model indirgeme uygulamalarında, çok düzeyli birleştiricilerdeki (ing: multiplexer models) paket kayıp olasılıklarının hesaplanmasında ve üç boyutlu şekilleri yeniden oluşturmada (ing: shape reconstruction) kullanılırlar. Bu çalışmada, çok değişkenli, yeni bir oransal yaklaştırım yöntemi geliştirilmiş, yöntemin özellikleri, günümüzde oransal yaklaştırım yöntemlerinin en başında gelen Padé yaklaştırım yöntemi ile karşılaştırmalar yaparak tartışılmıştır. Burada sunulan oransal yaklaştırım çizemi, YBMG'nde (Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi) yapılan kesmelere dayanır. YBMG, analitik yapısı bilinen çok değişkenli fonksiyonları daha az değişken içeren bir takım fonksiyonların toplamı olarak yaklaştırmaya dayanan ve son 15 yılda geliştirilen bir yaklaştırım yöntemidir. Çalışmada, yaklaştırmının niteliğini arttırmak amacı ile yöntemin yapısına bir takım esneklikler katılmıştır. YBMG, asıl fonksiyon yerine fonksiyonun birinci derece dönüşüm altındaki görüntüsüne uygulanmıştır. Bu da bize yaklaştırmaya fazladan esneklik katabilme olanağını vermiştir. YBMG aracılığı ile elde edilen bu yeni yaklaştırım yönteminin fiziksel problemlerdeki davranışını gözlemlemek amacı ile, yöntem doğrusal öteleme altında değişmeyen, çok değişkenli sistemlere (LSI) uygulanmıştır. Bunun dışında, tek değişkenli bir yay fonksiyon örneği de, yöntemin tek değişkenli fonksiyonlardaki etkinliğini incelemek için verilmiştir. Sonuçlar, tek veya çok değişkenli bir fonksiyonu Padé oransal yaklaştırım yöntemine göre daha geniş bir aralıkta yaklaştırabildiğimizi göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Yüksek boyutlu model gösterilimi, oransal yaklaştırım, çok değişkenli analiz.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: İrem YAMAN. iremymn@gmail.com; Tel: 285 70 80 dahili:123.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Bilişim Enstitüsü, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı'nda tamamlanmış olan "Dönüşümsel yüksek boyutlu model gösterilimi tabanlı yeni oransal yaklaşımların oluşturumu ve sendeleme yaklaşımı ile etkin biçimde kullanımı" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 28.04.2009 tarihinde dergiye ulaşmış, 08.07.2009 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.01.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Construction of new rational approximants based on transformational high dimensional model representation and their applications on LSI systems

Extended abstract

There are plenty of methods to approximate a multivariate function arising from different concepts. Some of them are based on the truncation of infinite series like Taylor series or orthogonal expansions. These do not explicitly reflect the singularities of the function to be approximated. One of the infinite series explicitly showing singularities is the Laurent series, which include finite or infinite simple fractions to represent polar singularities. Since any rational function can be uniquely represented by a Laurent series, it is common practice to use rational approximants for approximating the functions to explicitly reflect all polar singularities.

Padé approximants are perhaps the most frequently used ones in this category. Functions having strong singularities like branch points or essential singularities need special attention and can be approximated by using more specific techniques. Rational approximation techniques are perhaps the leading and easiest ones used to handle nonlinearities or singularities in the approximation of univariate or multivariate functions in science and engineering. They can be used in model-reduction of multidimensional Linear Shift Invariant (LSI) recursive systems, computing packet loss probabilities in multiplexer models, and shape reconstruction.

In this work, we construct a new multivariate rational approximation method and discuss its advantages and disadvantages by comparing with the Padé technique, which is at the moment the leading rational approximation technique. The rational approximation scheme proposed here is formulated by using HDMR (High Dimensional Model Representation) truncations. HDMR has been developed in the last 15 years to approximate multivariate functions by a sum of less variate functions. Here, we insert certain flexibilities into the approximation, in order to improve its quality. The most general class of this type of HDMR is called “Transformational High Dimensional Model Representation” (THDMR). In THDMR, the image of the original multivariate function is approximated by a sum of less variate functions. The coefficients of the transformation are considered as optimization parameters, which make the error of the method as small as possible. In this

work, a first degree polynomial structure is used as THDMR’s operator and the coefficients of this first degree transformation are assumed to be varying with independent variables. This is for giving flexibilities to the transformation and fixing them to approximate the HDMR expansion optimally. Although THDMR has a more general structure than we used here, we chose to work with the first degree polynomial structure for unique invertibility. Once an approximation for this first order polynomial structure constructed by HDMR method, the approximation for the original function can be obtained by inverting the polynomial structure. The rational structure of the method comes from this special choice of THDMR operator.

The univariate and bivariate results are quite impressive and imply that we can approximate a multivariate function over a quite larger interval when compared with the Padé method. This is caused by the fact that these two methods involve different strategies of extracting information from the original function. In THDMR method, the integral of the original function is computed over a specified interval to extract information from it, while Padé approximation method uses the derivatives of the function in a specific point. So THDMR method approximates the function more uniformly compared with Padé approximation technique which exhibits a local character. Moreover, the quality of the approximation can be improved by changing the integration intervals in THDMR.

An important defect of the rational approximation techniques is that they can produce some poles over the focused interval, although the original function has no singularity over the same interval at all. The singularity problem exists also in THDMR method. However, in THDMR, in order to obtain the rational approximant, certain integrals are needed to be computed and the location of the possible poles of the approximant can be altered by changing the interval of the integration. This facility of changing the locations of the poles with the integration interval makes the method attractive and efficient. In order to see the behavior of the method on physical problems, we have applied it on LSI systems to reduce the system. The transfer function of the LSI system has been approximated by THDMR and Padé methods. The results show that, the newly developed THDMR method can be used on LSI systems with high level approximation quality.

Keywords: *High dimensional model representation, rational approximation, multivariate analysis.*

Giriş

Matematiksel fonksiyonları çeşitli programlama dillerini veya betikleri kullanarak bilgisayar aracılığı ile hesaplamaların yolu, bu fonksiyonları çarpma/bölme ve/veya toplama/çıkarma işlemleri içeren yapılarda, olabiliyorsa kesin olarak, olamıyorsa yaklaşık olarak ifade etmektir. İlgilenilen fonksiyon eğer bir çokterimli (ing: polynomial) ise, fonksiyonun kendisi doğrudan bu dört işlemle belirlenebilir. Fakat fonksiyon bir çokterimli değilse; örneğin trigonometrik, üstel veya logaritmik bir fonksiyon ise, kullanılan betik veya programlama dili fonksiyonu dört işlemle hesaplanacak bir yapı ile yaklaşıtıp, bu yaklaşım ile sonuç üretecektir. Literatürde, açık yapısı verilen bir fonksiyonu yaklaşıtırmak için kullanılan oldukça fazla sayıda yöntem vardır. Oluşturulmasının ve kullanımının oldukça basit olması nedeni ile en fazla yeğlenen yöntemler, Taylor serisi gibi veya dik çokterimlilerin doğrusal birleşimlerinden oluşan sonsuz serilerden kesmeler ile elde edilen yaklaşıtırm yöntemleridir. Bu tür çokterimli yapısına dayanan yaklaşıtırm yöntemleri, asıl fonksiyonun yapısında bulunabilecek tekillikleri ve fonksiyonun sonsuzdaki davranışını temsil etme konusunda yeterince etkin değillerdir. Ayrıca eğriliği yüksek olan fonksiyonlarda da eğriliğin çokterimlilerle yaklaşıtırmaya yansıtılması oldukça güç olmaktadır. Asıl fonksiyon için oluşturulan sonsuz seri tiplerinden biri olan Laurent serileri, bağımsız değişkenin eksi kuvvetlerini de içerdiğinden, fonksiyonun paydadaki sıfırlanmalardan kaynaklanabilecek tekilliklerini ve sonsuzdaki davranışını temsil etmede diğer seri yöntemlere göre daha etkindir (Powell, 1996).

İki çokterimlinin oranı şeklinde oluşturulan fonksiyonlara oransal fonksiyon dendiği bilinmektedir. Her oransal fonksiyon, bir Laurent serisi aracılığı ile tek türlü belirlenebilir. Dolayısıyla, fonksiyondaki tekillikleri yaklaşıtırmaya yansıtmanın bir yolu, fonksiyonu oransal bir fonksiyon ile yaklaşıtırmaktır. Literatürde en fazla kullanılan oransal yaklaşıtırm yöntemi, Padé oransal yaklaşıtırmıdır (Baker, 2006). Öncelikle tek değişkenli fonksiyonlar için genel yapısı oluşturulan yöntem, sonraları çok değişkenli fonksiyonlar için genelleştirilmiştir. Padé oransal yaklaşıtırmı, asıl fonksiyonun Taylor

açılımına dayanan bir yöntem olduğundan, yaklaşıtırmının niteliği fonksiyonu seriye açtığımız nokta ile doğrudan ilintilidir. Açılımın yapıldığı nokta değiştirildikçe yaklaşıtırmının yakınsama aralığı da buna bağlı olarak değişecektir, fakat Taylor açılımının noktasal yapısından ötürü, Padé yaklaşıtırmı da noktasal bir yakınsama tablosu çizecektir.

Analitik yapısını bildiğimiz çok değişkenli bir fonksiyonu dört işlem ile temsil etmeye yarayan yaklaşıtırm yöntemlerinin dışında, bu çalışmada fonksiyonu daha az değişken içeren bir takım başka fonksiyonların toplamı olarak yaklaşıtırmaya yarayan Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) yöntemi üzerinde durulmuştur. Bu yöntem, değişken sayısı fazla olan fonksiyonların, eğer fonksiyon içerdiği değişkenlere göre toplamsala yakın bir yapıya sahipse bir sabit fonksiyon, bu yeterli olmuyorsa tek değişkenli fonksiyonlar ile bu sabit fonksiyonun toplamından oluşan bir fonksiyon ile yaklaşıtırmılmasına dayanır. Uygulamalarda en fazla iki değişkenli fonksiyonların toplamı yaklaşıtırmaya eklenmiştir. Bunun nedeni, yaklaşıtırmaların oluşturulmasının integral alma gerekliliğinin bulunması, bu işlemin de yöntemin maliyetini çok arttırmasıdır. Yaklaşıtırmada nerede durulması gerektiği konusunda gerekli bilgi, asıl fonksiyonun boyunun (ing: norm) yaklaşıtırmının boyuna oranı ile elde edilen bir takım ölçenler aracılığı ile elde edilir. İlgili ölçen, istenilen duyarlılıkta 1'e yakın ise yaklaşıtırmının iyi olduğu söylenebilir. Yaklaşıtırmının niteliğini ölçmek için kullanılan ölçenler, asıl fonksiyona doğrudan bağlıdırlar. Dolayısıyla fonksiyona YBMG yöntemi ile bir yaklaşıtırm elde edilmek istendiğinde, bu ölçenleri kontrol etmek ya da başka bir deyişle iyileştirmek mümkün olmamaktadır.

Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (DYBMG) yöntemi, fonksiyonun kendisine değil uygun bir dönüşüm altındaki görüntüsüne YBMG açılımının uygulanmasına dayanmaktadır. Bu yapısı ile yaklaşıtırmının niteliğini arttırma gücüne sahiptir. Dönüşüm için kullanılacak katsayılar, eniyileme (ing: optimization) parametreleri olarak devreye girerek, yaklaşıtırmının niteliğini belirleyecek ölçenleri 1'e yakın olacak şekilde enbüyükleme (ing: maximization) yararlar.

Bu işlem de yaklaştırmaya büyük bir esneklik getirmiş olur. Bu çalışmada, yukarıda sözü geçen dönüşüm 1. dereceden dönüşüm olarak alınmış, bu seçimle de asıl fonksiyon için elde edilen yaklaştıran, dik taban fonksiyonlarının doğrusal birleşimlerinin oranı olarak elde edilmiştir.

DYBMG ile oransal yaklaştıran oluşturulması

$f(x_1, \dots, x_N)$ çok değişkenli bir fonksiyon olsun. \mathcal{T} , f fonksiyonu üzerinde tanımlanmış bir dönüşüm, φ 'de bu dönüşümün fonksiyona uygulanması ile oluşan yeni fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} f(x_1, \dots, x_N) &= \varphi(x_1, \dots, x_N) \\ a_0(x_1, \dots, x_N) + a_1(x_1, \dots, x_N)f(x_1, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (1)$$

eşitliğindeki dönüşümün katsayıları a_0 ve a_1 , çok değişkenli fonksiyonlar olarak tanımlanmışlardır. Bu şekilde oluşturulan φ fonksiyonunun YBMG açılımı aşağıdaki şekildedir (Sobol, 1993):

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_N) &= \varphi_0 + \sum_{i=1}^N \varphi_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \varphi_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \\ &+ \dots + \varphi_{12 \dots N}(x_1, \dots, x_N). \end{aligned} \quad (2)$$

Burada, φ_0 sabit fonksiyon, $\varphi_i(x_i)$ 'ler tek değişkenli fonksiyonlar, $\varphi_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ 'ler iki değişkenli fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar "YBMG bileşenleri" olarak adlandırılırlar.

φ fonksiyonunu YBMG açılımındaki sabit bileşen, φ_0 ile yaklaştıralım.

$$\varphi = a_0 + a_1 f \approx \varphi_0. \quad (3)$$

(3) eşitliğinin sağ yanındaki yaklaştırmada, f fonksiyonunu yalnız bırakırsak,

$$f \approx \frac{\varphi_0 - a_0}{a_1}, \quad (4)$$

oransal yaklaştırmayı bağıntısını elde ederiz. (2) eşitliğindeki YBMG açılımında, (3) ile verilen sabit yaklaştırmayı kullanılması ile elde edilecek

hatanın bir ölçütü olan değişmezlik (sabitlik) ölçeni, boyların (ing: norm) oranı cinsinden aşağıdaki şekilde verilir (Yaman ve Demiralp, 2004):

$$\sigma_0 = \frac{\|\varphi_0\|^2}{\|\varphi\|^2}. \quad (5)$$

Burada boy, karesi integrale edilebilen, çok değişkenli fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayından herhangi bir g fonksiyonu için aşağıdaki şekilde, bir iç çarpım aracılığı ile tanımlanmaktadır.

$$\|g\|^2 = (g, g) = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} W g^2. \quad (6)$$

\mathcal{V} ve W aşağıdaki bağıntılarla verilmektedir:

$$\mathcal{V} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N], \quad (7)$$

$$W = \prod_{i=1}^N W_i(x_i) = \prod_{i=1}^N 1/(b_i - a_i). \quad (8)$$

(2) eşitliğindeki farklı YBMG bileşenleri (6)'da verilen iç çarpım kuralına göre birbirlerine diktirler. Yani, $(\varphi_{i_1 \dots i_k}, \varphi_{j_1 \dots j_l}) = 0, 1 \leq k, l \leq N, \{i_1 \dots i_k\} \neq \{j_1 \dots j_l\}$ eşitliğini sağlarlar (Tunga ve Demiralp, 2005).

(5) eşitliğindeki değişmezlik ölçeni, 0 ile 1 arasında değer alır (Yaman ve Demiralp, 2004) ve a_0 ve a_1 fonksiyonlarına bağlıdır. (4)'deki yaklaştırmayı niteliğini arttırmak için, (5) ile verilen σ_0 'ı enbüyükleyecek (ing: maximization) (1'e yakın olacak şekilde) a_0 ve a_1 fonksiyonlarının seçilmesi gerekmektedir. Bu amaçla, bu fonksiyonların N değişkenli fonksiyonlar, dolayısıyla N boyutlu bir Hilbert uzayında olduklarını göz önüne alalım ve onları Hilbert uzayındaki çok değişkenli taban fonksiyonları cinsinden yazalım.

Hilbert uzayında, çok değişkenli, birbirlerine dik, birim boylu (ing: unit norm), taban fonksiyonlarının oluşturduğu,

$$\mathcal{U} = \{u_i(x_1, \dots, x_N)\}_{i=1}^{\infty}, \quad (9)$$

kümesini göz önüne alalım. Diklik, iç çarpım üzerinden, aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$(u_i, u_j) = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} W u_i u_j = \delta_{ij}. \quad (10)$$

Burada, δ , Kronecker Delta fonksiyonunu temsil etmektedir.

(9)'daki taban fonksiyonlarından oluşan küme sonsuz elemanlıdır fakat uygulamada kolaylık olması açısından sonlu eleman ile çalışmak yerinde olacaktır. Bu amaçla N değişkenli fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayının kendisini değil, sonlu bir alt kümesini ele alalım ve (1)'deki a_0 ve a_1 fonksiyonlarını (9) eşitliğindeki taban fonksiyonlarını kullanarak oluşturalım. Yaklaşımımıza esneklik katması amacı ile de Hilbert uzayının m ve n boyutlu iki farklı alt kümesi ile çalışalım.

$$a_0(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j=2}^m a_j^{(0)} u_j(x_1, \dots, x_N), \quad (11)$$

$$a_1(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^n a_k^{(1)} u_k(x_1, \dots, x_N). \quad (12)$$

Bu eşitlikteki $a_j^{(0)}$ ve $a_k^{(1)}$ 'ler sabit, doğrusal birleşim katsayıları olup, yaklaşımdaki hatayı enküçükleyecek (ing: minimization) şekilde seçileceklerdir. Hatanın enküçüklenmesi, aslında, (5)'deki değişmezlik ölçeninin 1'e yakın olacak şekilde enbüyüklenmesi (ing: maximization) anlamına gelmektedir. Eşitlik (11)'de ilk taban fonksiyonunun yani, u_1 'in doğrusal birleşime alınmama nedeni, beklenen ama yararsız olan bir çözümün asıl kullanılacak olan yani yararlı çözümü gölgelemesinden kaçınmaktır.

(5)'deki σ_0 'ı belirlemek amacı ile, sırasıyla φ ve φ_0 fonksiyonlarını, a_0 ve a_1 'in yukarıdaki eşitliklerini kullanarak elde edelim. (11) ve (12) eşitliklerini (1)'de yerine yazalım.

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j=2}^m a_j^{(0)} u_j + \left(\sum_{k=1}^n a_k^{(1)} u_k \right) f. \quad (13)$$

φ fonksiyonunun sabit YBMG bileşeni olan φ_0 'ı elde etmek amacı ile (13) eşitliğinin her iki yanının W ağırlığı altında ve x_1, \dots, x_N değişkenlerinin tümü üzerinde N katlı integralini hesaplayalım (Demiralp, 2003). φ_0 bir iç çarpım aracılığı ile,

$$\varphi_0 = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (14)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki eşitlikteki \mathbf{a} ve $\boldsymbol{\alpha}$ vektörleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\mathbf{a} = (a_2^{(0)}, \dots, a_m^{(0)}, a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})^T, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_2^{(0)}, \dots, \alpha_m^{(0)}, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)})^T. \quad (16)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ vektörünün elemanları,

$$\alpha_j^{(0)} = (u_j, h), \quad 2 \leq j \leq m, \quad (17)$$

$$\alpha_k^{(1)} = (u_k, f), \quad 1 \leq k \leq n. \quad (18)$$

eşitlikleri ile verilir. Bu eşitliklerde kullanılan iç çarpım, (6)'daki şekilde tanımlanmıştır. (17) eşitliğindeki h fonksiyonu da her x_i değişkeni için tanımlanan $[a_i, b_i]$ aralıkları boyunca 1 değerini alan sabit bir fonksiyondur.

(5) eşitliğinin payındaki terimi elde etmek için (14)'deki φ_0 'ın boy karesini hesaplayalım. φ_0 sabit bir fonksiyon olduğu için boyunun karesi, fonksiyonun karesine eşit olacaktır.

$$\|\varphi_0\|^2 = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a}. \quad (19)$$

φ fonksiyonunun boy karesi de (13) eşitliği ve (6)'daki norm tanımını kullanarak hesaplanırsa,

$$\|\varphi\|^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a}, \quad (20)$$

şeklinde elde edilir. \mathbf{A} matrisi aşağıdaki blok matris aracılığı ile verilebilir:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Burada, \mathbf{I} ($m-1$) boyutlu birim matris olup, \mathbf{M} ve \mathbf{N} matrislerinin elemanları aşağıdaki eşitliklerle verilmektedir.

$$\begin{aligned} I_{jk} &= (u_j, u_k), \quad 2 \leq j, k \leq m, \\ M_{jk} &= (u_j, f u_k), \quad 2 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n, \\ N_{jk} &= (u_j, f^2 u_k), \quad 1 \leq j, k \leq n. \end{aligned} \quad (22)$$

(21) eşitliğindeki \mathbf{A} matrisi, asıl fonksiyon f , (9)'daki taban fonksiyonlarından oluşan doğrusal birleşimlerin oranı olmadığı sürece artı tanımlıdır (ing: positive definite) (Yaman, 2008).

Şimdi (19) ve (20) eşitliklerini (5)'de yerine yazalım ve sabitlik ölçeni σ_0 'ı kvadratik formuların oranı şeklinde elde edelim.

$$\sigma_0 = \frac{\|\varphi_0\|^2}{\|\varphi\|^2} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a}}. \quad (23)$$

σ_0 'ın bu ifadesi, Rayleigh oranının en büyük değerini, yapısındaki çekirdek matrisin en büyük özdeğerinde alacağı gerçeğini akılda tutarak, 1'e yakın olacak şekilde enbüyüklenirse \mathbf{a} vektörü,

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}, \quad (24)$$

şeklinde elde edilir. \mathbf{a} vektörünün (15) eşitliğine bakılacak olursa, bu vektörün elemanlarının (4)'de verilen oransal yaklaşımdaki a_0 ve a_1 fonksiyonlarının (11)-(12)'de verilen doğrusal birleşim ifadelerindeki sabit katsayılar olduğu görülür. Dolayısıyla \mathbf{a} vektörünün (24) eşitliği ile verilen değeri kullanılarak (11)-(12)'deki a_0 ve a_1 fonksiyonları ve (14)'deki φ_0 fonksiyonu hesaplanırsa, (4)'deki oransal yaklaşım aşağıdaki şekilde elde edilir:

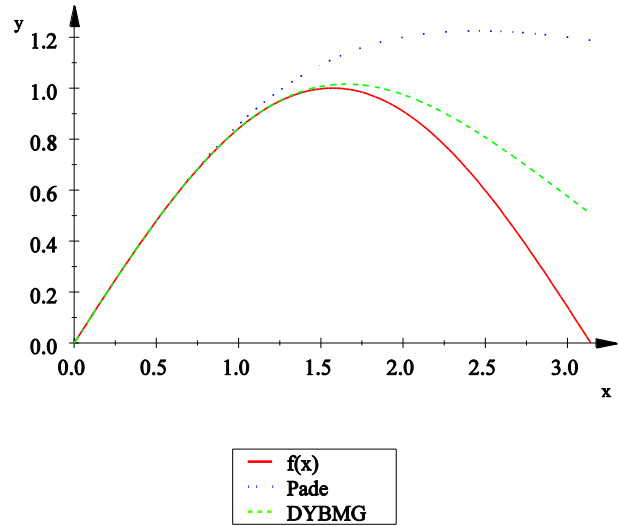
$$f \approx \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{a} - \mathbf{P} \mathbf{u})}{\mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{u}}. \quad (25)$$

Burada, \mathbf{u} elemanları (9)'daki çok değişkenli taban fonksiyonları olan bir vektör, \mathbf{P} 'de ($m+n-1$) boyutlu izdüşüm matrisidir. \mathbf{u} vektörünün ve \mathbf{P} matrisinin açık yapıları, \mathbf{e}_i , ($m+n-1$) boyutlu, i . birim kartezyen vektör olmak üzere, aşağıdaki eşitliklerle verilebilir.

$$\mathbf{u} = (u_2, \dots, u_m, u_1, \dots, u_n)^T, \quad (26)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T. \quad (27)$$

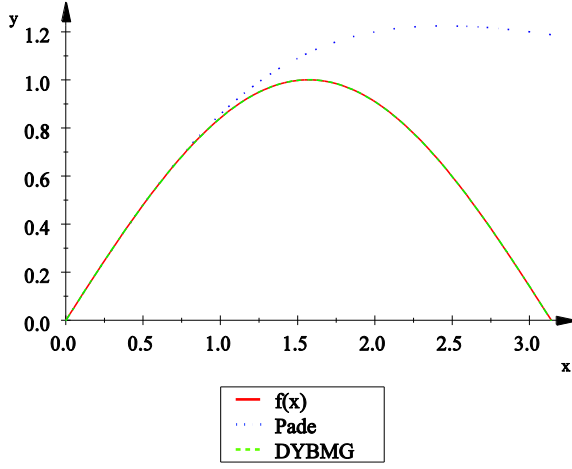
Tek değişkenli fonksiyon uygulamaları (25) ile elde edilen oransal yaklaşımın, tek değişkenli fonksiyonlarda davranışını gözlemlemek için (26)'daki taban fonksiyonlarını, $[a, b]$ aralığında, $W = 1/(b-a)$ ağırlığı altında dik, birim boylu, tek değişkenli çokterimliler olarak seçelim. $\sin(x)$ fonksiyonu için bu seçimle oluşturulan (25) oransal yaklaşımı (DYBMG yaklaşımı) ve Padé oransal yaklaşımı (Baker, 2006) için sonuçlar Şekil 1'de verilmektedir.



Şekil 1. $[0,1]$ Aralığında elde edilen DYBMG ve Padé yaklaşımları

Şekil 1'de çizimi verilen DYBMG yaklaşımı $[0,1]$ aralığında, $W = 1$ ağırlığı altında elde edilmiştir. DYBMG çalışma aralığını $[0,1]$ 'den $[0, \pi]$ 'ye genişletirsek, yeni elde edilen

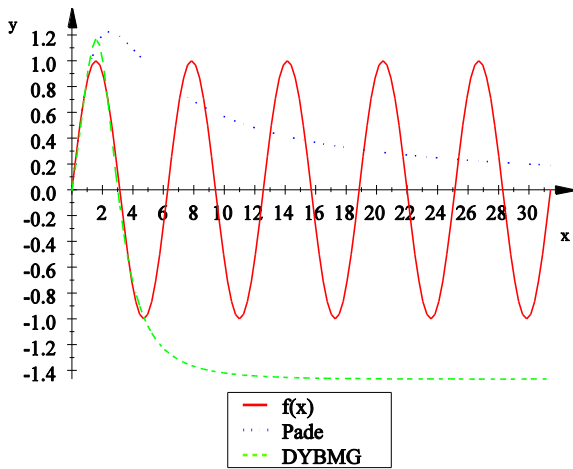
DYBMG yaklaşımı, Şekil 2'den de gözlemlediği gibi asıl fonksiyonu çok daha iyi temsil etmektedir.



Şekil 2. $[0, \pi]$ Aralığında elde edilen DYBMG ve Padé yaklaşımları

Bu sonuç, DYBMG yönteminde kullanılan integrallerin aralıklarının sonuçta elde edilen oransal yaklaşım ile doğrudan ilintili olduğunu, hatta bu integrallerin yaklaşımı iyileştirme gücüne sahip olduğunu göstermektedir.

Şekil 1 ve Şekil 2'de oransal yaklaşımların davranışları $[0, \pi]$ aralığında incelenmiştir. Daha geniş aralıktaki yaklaşım elde etmek için DYBMG çalışma aralığını $[0, \pi]$ 'den $[0, 5]$ 'e genişletelim. Bu yeni aralık için elde edilen çizimler Şekil 3'te verilmektedir.



Şekil 3. $[0, 5]$ Aralığında elde edilen DYBMG ve Padé yaklaşımları

Şekil 3'ten görüleceği gibi, yaklaşım aralığı büyüdükçe DYBMG yönteminin Padé yöntemine göre üstünlüğü daha açık bir şekilde gözlenmektedir. Padé yöntemi $[0, 10\pi]$ aralığında sadece $[0, \pi/2]$ arasında asıl fonksiyonla örtüşürken, DYBMG yöntemiyle elde edilen yaklaşım, fonksiyona $[0, 3\pi/2]$ aralığında oldukça iyi bir yaklaşım sunmaktadır.

Çok değişkenli, doğrusal öteleme altında değişmeyen sistemlerde DYBMG oransal yaklaşım uygulamaları

Çok değişkenli sistemler, bilgisayar destekli tomografi, görüntü işleme, sismoloji, sonar ve radar uygulamaları gibi pek çok alanda karşımıza çıkmaktadır. Örneğin görüntü işlemede, parazitler görüntülerden filtrelenmektedir. Bu filtreleme işlemi için oluşturulan sistem, bir veri iletilisini (ing: message) bilgisayar tarafından anlaşılacak bir yapıya dönüştürecektir. Fakat oluşturulan sistemler genellikle, çok sayıda işlem içermektedirler. Sistemlerin oluşturulmasında karşılaşılan hesaplama karmaşıklığı, model indirgeme yöntemleri ile azaltılmaya çalışılmıştır. Çok değişkenli oransal bir iletim fonksiyonu ile temsil edilen sistem literatürde genellikle Padé ve benzeri oransal yaklaşım yöntemleriyle indirgenmiştir.

Çok değişkenli, öteleme altında değişmeyen sistemin oransal iletim fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir (Abouir ve Cuyt, 2007):

$$H(z_1, z_2) = \frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)} \quad (28)$$

Bu oransal iletim fonksiyonu için uygun bir oransal yaklaşım üretmeden önce bazı noktaların altını çizmek önemlidir. Burada, üzerinde durulması gereken en önemli nokta kararlılık sorunudur. Eğer sistem kararlı değilse, içerisinde hesaplama sonucu ortaya çıkmış parazitler bulunan bir girdi, çıktıda sonsuz büyümelere yol açacaktır. H iletim fonksiyonunun kararlılığı, paydası B 'nin sıfırlarına doğrudan bağlıdır. İletim fonksiyonuna oransal bir yaklaşım oluşturu-

urken yaklaştırım fonksiyonunun da kararlı olması sağlanmalıdır. Yaklaştırım fonksiyonunun kararlılığı da bu fonksiyonun paydası ile ilintili olacaktır. Sistemin kararlı olabilmesi için (28)'deki payda fonksiyonu B 'nin sıfırlarının karmaşık düzlemde, birim çember içinde kalması gerekmektedir (Cuyt, Ogawa ve Verdonk, 1992).

Şimdi aşağıdaki iletim fonksiyonunu ele alalım ve bu fonksiyon için sırası ile DYBMG ve Padé oransal yaklaştırımlarını oluşturalım.

$$H(z_1, z_2) = \frac{1}{B(z_1, z_2)}. \quad (29)$$

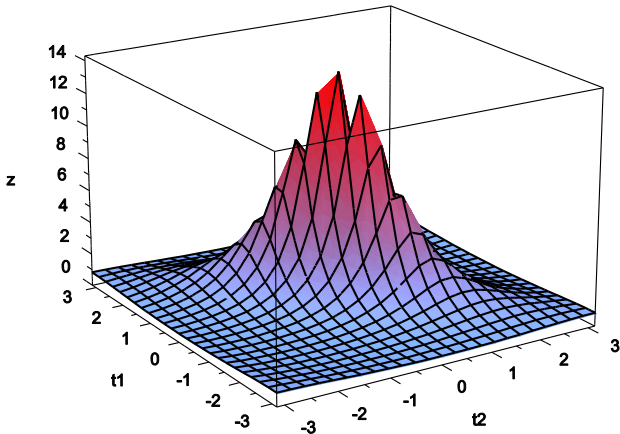
İşlemlerde kolaylık sağlaması açısından aşağıdaki değişken dönüşümünü kullanalım.

$$z_i = \frac{1}{w_i}, \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

(29)'daki $B(z_1, z_2)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$B(z_1, z_2) = B(w_1, w_2) = (1 - 0.1w_1 - 0.1w_2 - 0.1w_1w_2) \times (1 - 0.15w_1 - 0.15w_2 - 0.2w_1w_2) \times (1 - 0.2w_1 - 0.2w_2 - 0.4w_1w_2) \quad (31)$$

Bu iletim fonksiyonunun boyu, $z_1 = e^{it_1}$ ve $z_2 = e^{it_2}$, $-\pi \leq t_1, t_2 \leq \pi$ olmak üzere Şekil 4'te verilmektedir.

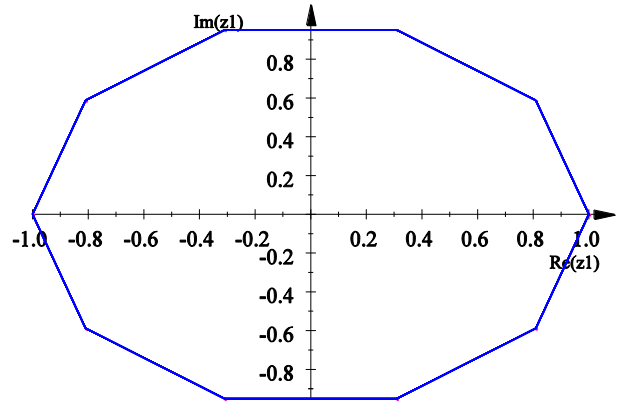


Şekil 4. İletim fonksiyonunun boyu

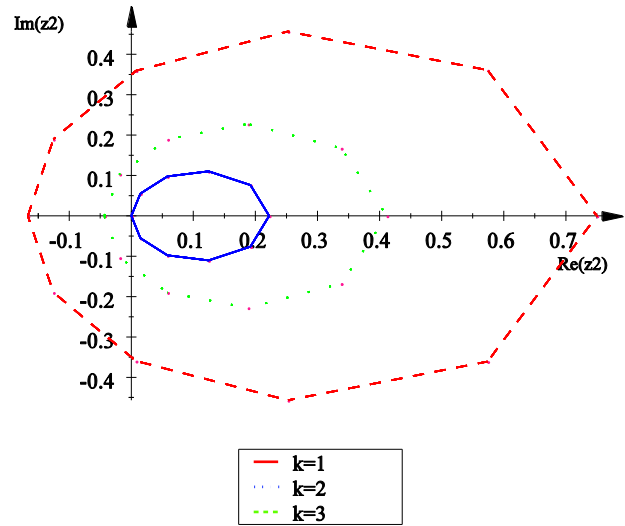
(29)'daki iletim fonksiyonu ile tanımlanan sistem kararlı bir sistemdir. Yani, başka bir deyişle (31) eşitliği ile verilen payda fonksiyonun kökleri birim çember içerisinde kalmaktadır (Cuyt vd., 1992). Payda fonksiyonunun kökleri aşağıdaki şekildedir.

$$z_1 = e^{i\phi}, \quad z_2 = \frac{a_k + c_k e^{-i\phi}}{1 - b_k e^{-i\phi}}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (32)$$

Bu köklerin çizimleri Şekil 5 ve Şekil 6'da verilmektedir.



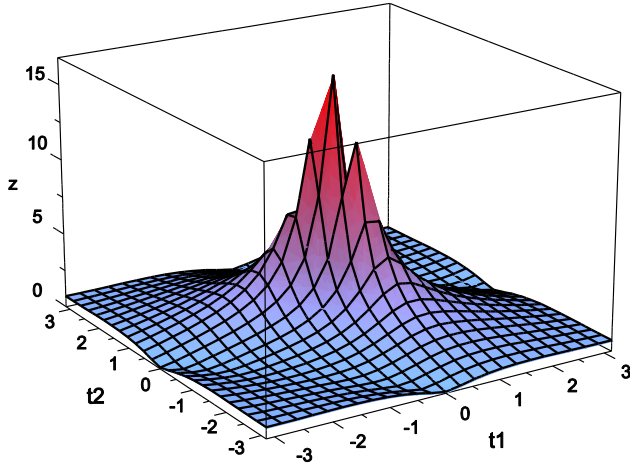
Şekil 5. İletim fonksiyonunun paydasının z_1 kökü



Şekil 6. İletim fonksiyonunun paydasının z_2 kökleri

Şimdi (29)'da verilen iletim fonksiyonu için, payı ve paydası ikinci dereceden DYBMG oran-

sal yaklaşımını oluşturalım. Bu yaklaşımın boyu, $z_1 = e^{it_1}$ ve $z_2 = e^{it_2}$, $-\pi \leq t_1, t_2 \leq \pi$ olmak üzere Şekil 7’de verilmektedir.

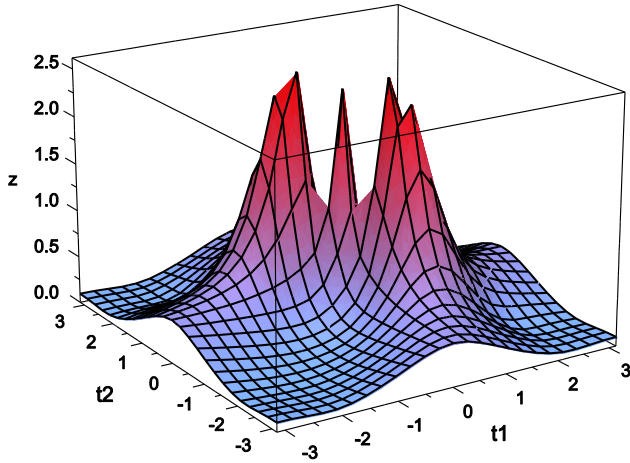


Şekil 7. DYBMG yaklaşımının boyu

DYBMG ile elde edilen yaklaşımdaki hatayı saptamak amacıyla aşağıdaki fark fonksiyonunu tanımlayalım:

$$r_{dybmg} = H_{dybmg} - H \quad (33)$$

Bu fark fonksiyonunun boyu, $z_1 = e^{it_1}$ ve $z_2 = e^{it_2}$, $-\pi \leq t_1, t_2 \leq \pi$ olmak üzere Şekil 8’de verilmektedir.



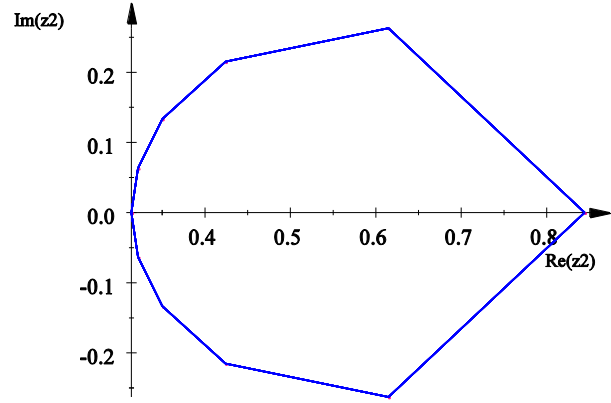
Şekil 8. Fark fonksiyonunun boyu ($|r_{dybmg}|$)

DYBMG yöntemi ile elde edilen yaklaşımın sistemin kararlılığını bozup bozmadığını belirlemek amacı ile yaklaşımın paydasının sıfırla-

rını incelemek yerinde olacaktır. DYBMG oransal yaklaşımının paydasının kökleri,

$$z_1 = e^{i\phi}, \quad z_2 = \frac{0.84}{1.84 - 0.84e^{-i\phi}}, \quad (34)$$

eşitlikleri ile verilir. z_2 kökü Şekil 9’da verilmektedir.



Şekil 9. DYBMG yaklaşımının paydasının z_2 kökü

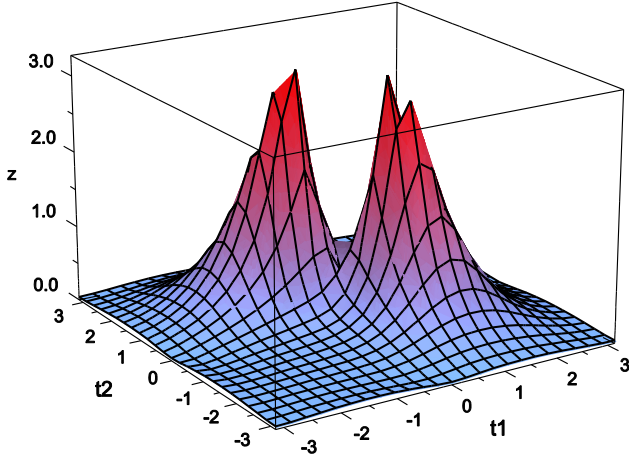
Şekil 5 ve Şekil 9’dan da gözlemlenebileceği gibi, DYBMG oransal yaklaşımın kökleri, karmaşık düzlemde, birim çember içerisinde yer alırlar. Dolayısıyla iletim fonksiyonun DYBMG yöntemi ile yapılan yaklaşım sistemin kararlılığını bozmaz.

(29)’daki iletim fonksiyonuna, Padé yöntemi ile yaklaşım oluşturmak istendiğinde oluşan yaklaşım için hata fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$r_{pade} = H_{pade} - H \quad (34)$$

Bu hata fonksiyonunun boyu Şekil 10’da verilmektedir.

Sonuçlardan da anlaşılacağı gibi iki değişkenli iletim fonksiyonu için DYBMG yöntemi, sistemin kararlılığını bozmadan bir oransal yaklaşım elde edilmesini sağlamıştır. Şekil 8 ve Şekil 10’a bakılırsa, DYBMG yöntemi ile oluşturulan yaklaşımın hatasının boyunun en büyük değerinin, Padé yöntemi ile oluşturulan oransal yaklaşıma göre daha küçük olduğu görülür.



Şekil 10. Fark fonksiyonunun boyu (r_{pade})

Burada incelenen örnekte, DYBMG çalışma bölgesi olarak $[0,1] \times [0,1]$ kartezyen çarpımı seçilmiştir. Fakat, DYBMG çalışma bölgesini değiştirerek yaklaştırmayı daha da iyileştirmek mümkündür. Hatta, iletim fonksiyonundaki bağımsız değişkenlerin karmaşık kısımlarını da ayrı bir değişken gibi düşünüp, bu değişkenler için de çalışma aralıkları oluşturmak, yaklaştırmının niteliğini arttıracaktır. İleriki çalışmalarda, bu ve bu tür başka bir takım uygulamalar için sözünü ettiğimiz incelemeler yapılabilir.

Sonuçlar

Bu çalışmada çok değişkenli fonksiyonları, daha az sayıda değişken içeren fonksiyonların toplamları ile yaklaştırmayı amaçlayan Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi'nin daha genel bir sınıfı olan Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi tabanlı, yeni bir oransal yaklaştırım yöntemi sunulmuştur.

Bu yeni yöntem, YBMG yönteminin yapısından dolayı verilen fonksiyondan integraller aracılığı ile bilgi üretir ve bu şekildeki bilgi üretimi ile fonksiyonu Padé yönteminin noktasal yakınsama özelliğinin aksine, bir aralık üzerinde yaklaştırır. Dolayısıyla yakınsama Padé yöntemine göre daha bütünsel olmaktadır. Bunun dışında yine çok önemli bir nokta, fonksiyondan bilgi üretmeye yarayan integrallerin aralıkları, fonk-

siyonun yaklaştırılmak istendiği bölgeye göre hatayı küçültecek şekilde seçilebilir. Bu da yöntemde büyük ölçüde esneklik kazandırmaktadır.

Çalışmada elde edilen yöntem çok değişkenli fonksiyonlar için genel bir yapıda türetilmiş olup, uygulama olarak tek ve iki değişkenli örnekler üzerinde durulmuştur. Çok değişkenli LSI sistemler için bir uygulama verilmiş, böylelikle yöntemin fiziksel problemlere de uygulanabildiği ve hatta Padé yöntemine göre üstünlük gösterdiği vurgulanmıştır. Bütünsel yakınsama özelliği ile yöntem, ileride farklı fiziksel problemlere uygulanabilecek alternatif bir oransal yaklaştırım yöntemi olarak sunulmaktadır.

Kaynaklar

- Abouir, J. ve Cuyt, A.A.M., (2007). Stable multidimensional model reduction and IIR filter design, *International Journal of Computing Science and Mathematics*, **1**, 16-27.
- Baker, G.E., (2006). *Padé approximants*, Cambridge University Press.
- Cuyt, A.A.M., Ogawa, S. ve Verdonk, B., (1992). Model reduction of multidimensional linear shift-invariant recursive systems using padé techniques, *Multidimensional Systems and Signal Processing*, **3**, 309-322.
- Demiralp, M., (2003). High dimensional model representation and its applications, *Tools for Mathematical Modelling*, **9**, 146-159.
- Powell, M.J.D., (1996). *Approximation theory and methods*, Cambridge University Press.
- Sobol, I.M., (1993). Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models, *MMCE (Mathematical Modelling and Computational Experiment)*, **1-4**, 407-419.
- Tunga, M.A. ve Demiralp M., (2005). A factorized high dimensional model representation on the nodes of a finite hyperprismatic regular grid, *Applied Mathematics and Computation*, **164**, 865-883.
- Yaman, İ. ve Demiralp M., (2004). High dimensional model representation approximation of an evolution operator with a first order partial differential operator argument, *ANACM (Numerical Analysis and Computational Methods)*, **1**, 280-289.