itüdergisi/***c***
fen bilimleri
Cilt:5, Sayı:1, 3-18
Kasım 2007

Langlands karşılıklılık ilkesi

Sevan BEDİKYAN[1], Kazım İlhan İKEDA[2*]

[1]*Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Matematik Bölümü, Çırağan Cad., Çiğdem Sok. No. 1, 34349, Beşiktaş, İstanbul*
[2]*İstanbul Bilgi Üniversitesi, Matematik Bölümü, Kurtuluş Deresi Cad. No. 47, Dolapdere, 34440, Beyoğlu, İstanbul*

Özet

*Bir K global cisminin abelyen genişlemeleri ve bu genişlemelerin aritmetik yapıları tamamen taban cisim K ve buna bağlı değişmezler yardımıyla Artin karşılıklılık yasası ile betimlenmektedir. K global cisminin abelyen olmayan Galois genişlemelerini de içerecek şekilde genel bir kuram hipotetik olarak inşa edilecek olursa Langlands'ın karşılıklılık ilkesine, daha genel olarak da Langlands'ın fonktörsellik ilkesine varılır. Bu derleme çalışmasında sayı cisimleri için Langlands'ın karşılıklılık ilkesinin ne olduğunu kısaca özetlemeye çalışacağız. İlk olarak, K sayı cismi için, ve bu cismin henselsel v yerlerindeki kapanışlarından elde edilen K_v lokal cisimleri için, sınıf cisim kuramlarının ne olduğunu, ve bu kuramların temelini oluşturan Θ_K global ve θ_v lokal Artin karşılıklılık yasalarını, kısaca özetleyeceğiz. Çalışmanın geri kalan kısmında, K sayı cismi için tanımlı olan Artin karşılıklılık yasasının analitik formülasyonunu kullanarak, global sınıf cisim kuramının G_K mutlak Galois gurubunun 1-boyutlu sürekli temsilleri ile K sayı cisminin belli tip Hecke karakterleri arasında "doğal" bir eşleme olduğunu göreceğiz. Burada "doğal" eşleme ile, karşılık gelen objelere bağlı **L**-fonksiyonlarının aynı olması anlaşılmaktadır. Sonuç olarak, Pontrjagin ikilik teoreminin abelyen-olmayan genellemesi, Tannaka ikilik teoremini kullanarak, abelyen-olmayan sınıf cisim kuramının inşası için G_K mutlak Galois gurubunun n-boyutlu sürekli temsillerini K sayı cismine bağlı Hecke karakterlerinin belli çeşit genellemesi olan analitik objeler ile parametrize etmemiz gerekmektedir. Langlands, 1967 yılında, Hecke karakterlerini genelleyen otomorf temsiller kuramını ortaya atmıştır. Çalışmanın geri kalan kısımlarında, bu kuram ve abelyen-olmayan sınıf cisim kuramını, yani Langlands karşılıklılık ilkesini özetleyeceğiz.*

Anahtar Kelimeler: *Karşılıklılık yasası, Galois temsilleri, otomorf temsiller, **L**-fonksiyonları, motifik Galois gurupları, Langlands gurupları.*

[*]Yazışmaların yapılacağı yazar: Kazım İlhan İKEDA. ilhan@bilgi.edu.tr; Tel: (212) 311 54 17.
Bu derleme çalışması, ikinci yazar (K.İ.İ) tarafından *Antalya Cebir Günleri (2004)* ve *YTÜ Matematik Bölümü Seminerleri (2005)* çerçevesinde sunulmuş olan seminerlerin birinci yazar (S.B) yardımı ile hazırlanmasından oluşmuştur. Makale metni 13.04.2007 tarihinde dergiye ulaşmış, 16.04.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2008 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Langlands reciprocity principle

Extended abstract

Class field theory studies the arithmetic of abelian extensions of a given global or local field K through the algebraic invariants of the base field K via global or local Artin reciprocity law respectively. If K is a local field with finite residue class field κ_K, the local class field theory over K is then described by a unique "natural" topological and algebraic homomorphism θ_K, which is called the local Artin reciprocity law of K. By the naturality of the map θ_K, we should understand certain functorial properties of this mapping. If K is a global field, where we always assume that K is a number field in this text, the class field theory over K is then described by a unique "natural" topological and algebraic homomorphism Θ_K, called the global Artin reciprocity law of K, which satisfies certain functorial properties and which should be compatible with the local Artin reciprocity laws of K_v, the completions of the global field K at places v.

Thus, the remaining problem is to extend class field theory to a general theory that includes the arithmetic description of non-abelian extensions of global and local fields in terms of the ground field. This general theory has a conjectural description, called the Langlands reciprocity law, or more generally the functoriality principle of Langlands. The aim of this survey article is to describe the reciprocity principle of Langlands.

*In order to describe the reciprocity principle of Langlands, we reformulate the Artin reciprocity law Θ_K over the global field K, so that, **1**-dimensional representations of the absolute Galois group G_K of the global field K are parametrized by certain Hecke characters of K, which depend on the ground field K only. Taking into account the Pontrjagin duality theorem for locally compact abelian groups, **1**-dimensional representations of G_K determines the group G_K^{ab}. Moreover, the naturality of the parametrization, the arithmetic of G_K^{ab} (that is, the arithmetic of each finite abelian extension over K) which is encoded in the Artin **L**-function is encoded in the corresponding Hecke **L**-function defined over K as well. Therefore, in order to describe the absolute Galois group G_K and the arithmetic of each finite Galois extension over K, following the above recipy, and in view of Tannaka duality for non-abelian compact groups, we would like to parametrize all irreducible n-dimensional representations of the absolute Galois group G_K in terms of certain objects that generalize Hecke characters of K in a natural way.*

Langlands, in 1967 (cf. Langlands 1970) made a fantastic discovery and realized that the objects generalizing Hecke characters are certain type of representations of the adèlic groups $GL(n, \mathbb{A}_K)$, called the cuspidal automorphic representations of the group $GL(n, \mathbb{A}_K)$.

*The reciprocity principle of Langlands asserts a natural assignement from n-dimensional irreducible representations ρ of G_K and cuspidal automorphic representations $\Lambda_K^{(n)}(\rho)$ of $G(\mathbb{A}_K)$. By the naturality of this assignment we should understand the equality of the Artin **L**-function $L(s,\rho)$ and the standard **L**-function $L\left(s, \Lambda_K^{(n)}(\rho)\right)$ of Godement and Jacquet.*

There is also the most general form of the reciprocity principle, which involves the motivic Galois group $\mathcal{M}_K$ over K and the Langlands group $\mathcal{L}_K$ over K. However both of these universal groups are still conjectural in nature.

Keywords: *Reciprocity law, Galois representations, automorphic representations, **L**-functions, motivic Galois groups, Langlands groups.*

Giriş

Modern aritmetiğin en önemli temel kuramı olarak niteleyebileceğimiz ve temeli Euler, Legendre ve Gauss'un çalışmalarına dayanan, *(abelyen) sınıf cisim kuramı*, Kronecker, Weber, Hilbert, Artin, Chevalley, Hasse ve Takagi başta olmak üzere, pek çok önemli matematikçinin katkılarıyla, 20. yüzyılın ilk yarısında inşa edilmiştir.

Günümüzde artık pek çok "görünürde farklı" (*analitik*, *kohomolojik*, *soyut-aksiyomatik* gibi) formülasyonu bulunan sınıf cisim kuramını *lokal* ve *global* olmak üzere iç içe geçmiş iki altkuramın bileşkesi olarak inceliyoruz. Bu kuram, bir K global cisminin (ve bu cismin her sonlu ve sonsuz ν asal ideallerinde tamlanışı olarak tanımlanan K_ν lokal cisimlerinin) *E abelyen* genişlemelerinin ($\mu | \nu$ şartı altında, E_μ *abelyen* genişlemelerinin) *aritmetik yapılarını* sadece *taban cisim K* ve K global cismine bağlı *değişmezler* yardımıyla (sadece *taban cisim* K_ν lokal cismi ve bu cisme bağlı *değişmezler* yardımıyla) global (lokal) *Artin karşılıklılık yasası* altında tamamen betimler. Burada, bir global cismin *aritmetik yapısı* ile, bu cisme ait tamsayılar halkasındaki ideallerin bu halkadaki asal ideallere parçalanışı; lokal durumda ise, lokal Galois genişlemelerinin yüksek dallanma yapısının incelenmesi anlaşılmalıdır.

Bu durumda, doğal olarak şu soru ile karşılaşırız:

> *Abelyen sınıf cisim kuramını K global, veya lokal, cisminin her E/K Galois genişlemelerini (bunlara elbette abelyen-olmayan Galois genişlemeleri de dahil) de kapsayacak şekilde genelleştirmek, yani* ***abelyen-olmayan global ve lokal sınıf cisim kuramını*** *inşa etmek mümkün müdür?*

Bu soru, *Langlands'ın karşılıklılık ilkesi* ile (hipotetik olarak) fazlası ile cevaplanmaktadır, bkz. Langlands (1970). Karşılıklılık ilkesini de özel bir durum olarak içerisinde barındıran Langlands'ın *fonktörsellik ilkesi* (bkz. Arthur 2003) daha ilerideki bir sayıda tartışılacaktır.

Son zamanlarda, Langlands fonktörsellik ilkesi, sayılar kuramının yanısıra cebirsel topolojiden matematiksel fiziğe önemli uygulama alanları bulmuştur. Bu günlerde pek çok fizikçi de bu önemli kuramın ne olduğunu merak etmektedir. Biz, bu derleme çalışmamızda, temeli R. P. Langlands tarafından, 1967 yıllarında, atılmış olan fonktörsellik ilkesinin özel bir hali olan karşılıklılık ilkesinin ne olduğunu, olabildiğince basit bir şekilde, matematikçi veya fizikçilere anlatmaya çalışacağız. Ayrıca, bu konu ile ilgili herhangi bir Türkçe kaynak olmadığı da gözönüne alınırsa, bu derleme çalışmasının bu yönde de bir eksikliği gidereceğine inanıyoruz. Bu konuda daha derin bilgi sahibi olmak isteyen veya bu çalışmada kullanılan teorem ve kuramların ispatlarını öğrenmek isteyen okuyucular için pek çok temel çalışmayı *Kaynaklar* kısmında ayrıca belirttik. Her derleme çalışmasında olduğu gibi, bu çalışmada da, gözden kaçmış veya olası hataların tamamı yazarlara (özellikle ikinci adlı yazara) aittir.

Lokal ve global sınıf cisim kuramları

Langlands karşılıklılık ilkesini iyi bir şekilde anlamak için, ilk olarak, lokal ve global Artin karşılıklılık yasalarının ne olduğunu bilmeliyiz. Bu bölümde, lokal ve global sınıf cisim kuramlarını kısaca, ispat vermeden, tekrar edeceğiz. Detaylar için, Cassels-Fröhlich (1967), Lang (1994), Neukirch (1999) ve Poonen (2006).

Lokal sınıf cisim kuramı

K bir *henselsel (=arşimetsel olmayan) ve sonlu* O_K/p_K *kalan-sınıf cismine sahip bir lokal cisim* olsun. K cismine bağlı (her zaman *normalleştirilmiş* olarak kabul edeceğimiz) *değerlendirme fonksiyonunu*

$$\nu_K : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \tag{1}$$

ile göstereceğiz. Burada, O_K ile K cisminin *tamsayılar halkasını* ve p_K ile bu halkanın *maksimal idealini* gösteriyoruz. Bu K cismine temel örnek olarak, $\mathbb{Q}_p$ *p-sel sayılar cismini* veya $\mathbb{F}_p((T))$ $\mathbb{F}_p$ *-katsayılı Laurent serileri cismini* verebiliriz.

K üzerinde tanımlı lokal sınıf cisim kuramı ile *lokal Artin karşılıklılık yasası* olarak adlandırılan

$$\theta_K : K^\times \to Gal\left(K^{ab}/K\right) \quad (2)$$

"doğal" gurup homomorfizmasını anlıyoruz. Burada, θ_K okunun doğallığı, bu okun aşağıda sıralayacağımız özelliklere sahip olması anlamındadır.

1. Her sonlu L/K genişlemesi için, $\alpha \in L^\times$ olması kaydıyla,

$$\theta_L(\alpha)\big|_{K^{ab}} = \theta_K\left(N_{L/K}(\alpha)\right) \quad (3)$$

   eşitliği sağlanır. Burada, $N_{L/K} : L^\times \to K^\times$ *norm homomorfizmas*ını göstermektedir;

2. Her sonlu L/K genişlemesi için, $\alpha \in K^\times$ olması kaydıyla,

$$V_{G_K \to G_L}\left(\theta_K(\alpha)\right) = \theta_L(\alpha) \quad (4)$$

   eşitliği sağlanır. $V_{G_K \to G_L} : G_K^{ab} \to G_L^{ab}$ ile gösterilmiş olan ok, *guruplar kuramında tanımlı olan transfer "Verlagerung" okudur*;

3. Her $\sigma \in Aut\left(K^{sep}\right)$ için, $\alpha \in K^\times$ olması kaydıyla,

$$\theta_{K^\sigma}\left(\alpha^\sigma\right) = \sigma\theta_K(\alpha)\sigma^{-1} \quad (5)$$

   eşitliği sağlanır;

4. Her sonlu abelyen genişleme L/K için,

$$\theta_{L/K} : K^\times \xrightarrow{\theta_K} Gal\left(K^{ab}/K\right) \xrightarrow{res_L} Gal\left(L/K\right) \quad (6)$$

   bileşkesi olarak tanımlı olan ok sürjektif bir homomorfizmadır, ve bu bileşke $Çek\left(\theta_{L/K}\right) = N_{L/K}L^\times$ eşitliğini sağlar;

5. İzdüşümsel tamlama alarak, (2) numaralı denklem ile tanımlı homomorfizmayı

$$\hat{\theta}_K : \hat{K}^\times \xrightarrow{\cong} Gal\left(K^{ab}/K\right) \quad (7)$$

   topolojik gurup izomorfizmasına yükseltmek mümkündür;

6. (2) numaralı denklem ile tanımlanmış olan homomorfizma ve sonsuz Galois kuramı yardımı ile Şekil 1'de görülen

$$Çek\left(\theta_{L/K}\right) \leftrightarrow Gal\left(K^{ab}/L\right) \leftrightarrow L/K \quad (8)$$

eşlemeleri vardır.

7. **(Dallanma teoremi).** (2) numaralı denklem ile tanımlı homomorfizma Şekil 2'de görülen eşleşmeyi verir. Burada, $1 \le i \in \mathbb{R}$ için tanımlı yüksek birim gurubu U_K^i,

$$U_K^i = \left\{u \in U_K : u \equiv 1\left(p_K^i\right)\right\} \quad (9)$$

   olarak tanımlıdır. Galois gurubunu G olarak göstereceğimiz *sonlu Galois* genişlemesi L/K için ve her $-1 \le v \in \mathbb{R}$ sayısı için, v. üst-dallanma gurubu G^v,

$$G^v = \left\{\sigma \in G : i_{L/K}(\sigma) \ge \psi_{L/K}(v) + 1\right\} \quad (10)$$

$$\left\{\begin{array}{c} K^\times \text{ içindeki} \\ \text{sonlu indeks} \\ \text{açık altguruplar} \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} Gal\left(K^{ab}/K\right) \\ \text{içindeki (sonlu indeks)} \\ \text{açık altguruplar} \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} K^{sep} \text{ içinde bulunan} \\ K \text{ cisminin sonlu} \\ \text{abelyen gen.leri} \end{array}\right\}$$

Şekil 1. Lokal sınıf cisim eşlemesi

olarak tanımlıdır. Burada, O_L / O_K halka genişlemesi *monojen* bir genişleme olduğundan dolayı, $O_L = O_K[x]$ eşitliğini sağlayan bir $x \in O_L$ vardır. Bu x yardımıyla, her $\sigma \in G$ için, $i_{L/K}(\sigma) = \nu_L(\sigma(x) - x)$ olarak tanımlanabilir. $\psi_{L/K} : \mathbb{R}_{\geq -1} \to \mathbb{R}_{\geq -1}$ ile de L/K genişlemesine bağlı *Hasse-Herbrandt fonksiyonunu* gösteriyoruz. Eğer $-1 \leq v \in \mathbb{R}$ sayısı, her $0 < \delta \in \mathbb{R}$ için, $G^v \neq G^{v+\delta}$ şartını sağlıyorsa, bu v sayısına *bir kırılma sayısı*dır denir. L/K abelyen bir genişleme olduğu için, *Hasse-Arf teoremi* ile kırılma sayılarının tamsayılar kümesinde yer alacağını biliyoruz. Eğer L/K *genişleme derecesi sonsuz* bir Galois genişlemesi ise, üst-numaralandırma "bölüm alma" altında korunduğu için, G^v gurubu izdüşümsel limit alarak,

$$G^v = \varprojlim_{K \subseteq E \subset L} Gal(E/K)^v \tag{11}$$

limiti olarak tanımlanır. Bu durumda, G topolojik gurubu için, aynı şekilde tanımı olan $v \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ kırılma sayısı, $K \subseteq E \subset L$ şartını sağlayan sonlu bir E/K Galois genişlemesine karşılık gelen $Gal(E/K)$ gurubunun kırılma sayısıdır. Şekil 2'deki eşleme, her $0 \leq i \in \mathbb{Z}$ ve her $i-1 < v \leq i$ için

$$U_K^i \leftrightarrow Gal\left(K^{ab}/K\right)^v \tag{12}$$

şeklinde tanımlıdır.

Global sınıf cisim kuramı

Bu paragraftan itibaren bir K global cismi olarak *sadece* sayı cisimlerini ($K = \mathbb{Q}$ veya $\mathbb{Q}$ cisminin sonlu bir K genişlemesi) anlayacağız. K bir global cisim ise, K üzerinde tanımlı global sınıf cisim kuramı ile *global Artin karşılıklılık yasası* olarak adlandırılan

$$\Theta_K : \mathbb{A}_K^\times / K^\times \to Gal\left(K^{ab}/K\right) \tag{13}$$

"doğal" gurup homomorfizmasını anlıyoruz. Burada, $\mathbb{A}_K$ ile K global cisminin *adeller halkası*, ve $\mathbb{A}_K^\times$ ile K global cisminin *ideller gurubu* gösterilmektedir. $\mathbb{A}_K$ adeller halkası, $\prod_v{}' (K_v : O_v)$ *kısıtlamalı direkt çarpımı* olarak, ve $\mathbb{A}_K^\times$ ideller gurubu $\prod_v{}' (K_v^\times : U_v)$ *kısıtlamalı direkt çarpımı* olarak inşa edilir. Bu iki cebirsel yapı, tanımladıkları *kısıtlamalı direkt çarpım topolojisi* altında sırasıyla bir *yerel kompakt topolojik halka* ve bir *yerel kompakt topolojik gurup* yapılarına sahiptir. Bu durumda, K halkası ve $K^\times$ gurubu, sırasıyla her $\alpha \in K$ ve $\alpha \in K^\times$ için, $\alpha \mapsto (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \ldots)$ biçiminde tanımlı $K \xrightarrow{\Delta} \mathbb{A}_K$ ve $K^\times \xrightarrow{\Delta} \mathbb{A}_K^\times$ *diagonal gömmeleri* altında, $\mathbb{A}_K$ adeller halkasının ve $\mathbb{A}_K^\times$ ideller gurubunun *kesikli* birer althalkasıdır ve altgurubudur. Lokal durumda olduğu gibi, Θ_K okunun *doğallığı ile*, bu okun şimdi sıralayacağımız özellikleri sağladığını anlıyoruz.

1. Her sonlu L/K genişlemesi için, $\alpha \in \mathbb{A}_L^\times / L^\times$ olması kaydıyla,

$$\Theta_L(\alpha)\big|_{K^{ab}} = \Theta_K\left(N_{L/K}(\alpha)\right) \tag{14}$$

eşitliği sağlanır. Burada, $\mathbb{A}_L \cong \mathbb{A}_K \otimes_K L$ izomorfizması neticesinde, $\mathbb{A}_L$ *serbest* bir $\mathbb{A}_K$-modülüdür, ve $N_{L/K} : \mathbb{A}_L \to \mathbb{A}_K$

$$\left\{ U_K^i \leq U_K \leq K^\times \right\}_{0 \leq i \in \mathbb{Z}} \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} Gal\left(K^{ab}/K\right) \text{ içindeki} \\ \text{yüksek-dallanma} \\ \text{altgurupları } Gal\left(K^{ab}/K\right)^v \end{array} \right\}_{-1 \leq v \in \mathbb{R}}$$

Şekil 2. Dallanma eşlemesi

norm tasviri mevcuttur. Bu ok yardımı ile, $N_{L/K}:\mathbb{A}_L^\times/L^\times \to \mathbb{A}_K^\times/K^\times$ homomorfizması tanımlıdır;

2. Her sonlu L/K genişlemesi için, $\alpha \in \mathbb{A}_K^\times/K^\times$ olması kaydıyla,

$$V_{G_K\to G_L}\left(\Theta_K(\alpha)\right)=\Theta_L(\alpha) \qquad (15)$$

eşitliği sağlanır. $V_{G_K\to G_L}:G_K^{ab}\to G_L^{ab}$ ile gösterilmiş olan ok, *guruplar kuramında tanımlı olan transfer "Verlagerung" okudur*;

3. Her $\sigma \in Aut\left(K^{sep}\right)$ için, $\alpha \in \mathbb{A}_K^\times/K^\times$ olması kaydıyla,

$$\Theta_{K^\sigma}\left(\alpha^\sigma\right)=\sigma\Theta_K(\alpha)\sigma^{-1} \qquad (16)$$

eşitliği sağlanır;

4. Her sonlu abelyen genişleme L/K için,

$$\Theta_{L/K}:\mathbb{A}_K^\times/K^\times \xrightarrow{\Theta_K} Gal\left(K^{ab}/K\right) \xrightarrow{res_L} Gal\left(L/K\right) \qquad (17)$$

bileşkesi olarak tanımlı olan ok sürjektif bir homomorfizmadır, ve bu bileşke $Çek\left(\Theta_{L/K}\right)=N_{L/K}\left(\mathbb{A}_L^\times/L^\times\right)$ eşitliğini sağlar;

5. İzdüşümsel tamlama alarak, (13) numaralı denklem ile tanımlı homomorfizmayı topolojik gurup izomorfizmasına yükseltmek mümkündür;

$$\hat{\Theta}_K:\mathbb{A}_K^\times \hat{/} K^\times \xrightarrow{\cong} Gal\left(K^{ab}/K\right) \qquad (18)$$

6. (13) numaralı denklem ile tanımlanmış olan homomorfizma ve sonsuz Galois kuramı yardımı ile Şekil 3' te görülen

$$Çek\left(\Theta_{L/K}\right)\leftrightarrow Gal\left(K^{ab}/L\right)\leftrightarrow L/K \qquad (19)$$

eşlemeleri vardır.

7. **(Dallanma teoremi).** Hemen hemen her v yeri için $e_v=0$ ve her reel v yeri için $e_v\in\{0,1\}$ ve her kompleks v yeri için $e_v=0$ şartlarını sağlayan $0\le e_v$ tamsayılarından oluşturulan *yapısal* $\mathfrak{M}=\prod_v v^{e_v}$ *çarpımı* için lokal olarak: eğer $e_v=0$ ise $U_{\mathfrak{M},v}:=U_v$; $e_v>0$ ve v sonlu bir yer ise $U_{\mathfrak{M},v}:=U_v^{e_v}$; $e_v>0$ ve v reel bir yer ise $U_{\mathfrak{M},v}:=\mathbb{R}_{>0}$ guruplarını tanımlayalım ve $U_{\mathfrak{M}}=\prod_v U_{\mathfrak{M},v}\le\mathbb{A}_K^\times$ global gurubunu inşa edelim. Bu durumda $\mathbb{A}_K^\times \to \mathbb{A}_K^\times/K^\times$ doğal homomorfizması altında $U_{\mathfrak{M}}$ gurubunun $\overline{U_{\mathfrak{M}}}$ imgesi, $\mathbb{A}_K^\times/K^\times$ gurubunun açık ve sonlu-indeks bir alt gurubudur. Dolayısı ile Şekil 3 yardımı ile gösterilmiş olan eşlemeler altında öyle bir $R_{\mathfrak{M}}/K$ sonlu ve abelyen genişlemesi mevcuttur ki, global Artin kaşılıklılık yasası neticesinde

$$C_K/\overline{U_{\mathfrak{M}}}\simeq \mathbb{A}_K^\times/U_{\mathfrak{M}}K^\times \simeq Gal\left(R_{\mathfrak{M}}/K\right) \qquad (20)$$

izomorfizmaları vardır.

K global cismi için tanımlı olan $C_K=\mathbb{A}_K^\times/K^\times$ gurubuna K'nin *idel sınıf gurubu* denir.

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbb{A}_K^\times/K^\times \text{ içindeki}\\ \text{sonlu indeks}\\ \text{açık altguruplar}\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}Gal\left(K^{ab}/K\right)\\ \text{içindeki (sonlu indeks)}\\ \text{açık altguruplar}\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}K^{sep} \text{ içinde bulunan}\\ K \text{ cisminin sonlu}\\ \text{abelyen gen.leri}\end{array}\right\}$$

Şekil 3. Global sınıf cisim eşlemesi

Lokal ve global kuramlar arasındaki bağıntı
Yukarıda kısaca özetlediğimiz lokal ve global sınıf cisim kuramları arasındaki ilişkiden kısaca bahsedelim. K global cisminin herhangi henselsel yeri v olsun. Bu durumda, v yerine göre K global cisminin tamlanışı K_v, bir lokal cisimdir. Her $\alpha \in K_v^\times$ için, $\alpha \mapsto (1,\ldots,1,\alpha,1,\ldots)$ şeklinde tanımlı $K_v^\times \to \mathbb{A}_K^\times$ gömmesi ile $\mathbb{A}_K^\times \to \mathbb{A}_K^\times / K^\times$ doğal morfizmasının bileşkesini alarak, $g_v : K_v^\times \to \mathbb{A}_K^\times \to \mathbb{A}_K^\times / K^\times$ gömmesini elde ederiz. Bu durumda, her $\alpha \in K_v^\times$ için,

$$\Theta\left(g_v\left(\alpha\right)\right) = \theta_v\left(\alpha\right)\Big|_{K^{ab}} \tag{21}$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak, *K üzerinde tanımlı global Artin karşılıklılık yasası bize, her v için, K_v üzerinde tanımlı olan lokal Artin karşılıklılık yasalarını verir*. Diğer taraftan, K global cisminin tüm v henselsel yerleri için, K_v üzerinde tanımlı θ_v lokal Artin karşılıklılık yasaları verilsin. Bu durumda, L/K sonlu abelyen genişlemesi için, $(a_v) \in \mathbb{A}_K^\times$ olması kaydıyla, $\prod_v \theta_v(a_v)$ çarpımı sonludur ve $Gal(L/K)$ içinde bir eleman tanımlar. Gerçekten de, hemen her v yeri, L/K genişlemesi içinde dallanmamış olduğundan, ve hemen her v yeri için $a_v \in U_v$ şartı sağlandığından dolayı, $\theta_v(a_v) = id_L$ eşitliği hemen her v yeri için sağlanır. Sonuç olarak, her sonlu abelyen genişleme L/K için, $(a_v) \in \mathbb{A}_K^\times$ olması kaydıyla,

$$\Theta_{L/K}\left(\left(a_v\right)\right) = \prod_v \theta_v\left(a_v\right) \tag{22}$$

çarpımı olarak tanımlı

$$\Theta_{L/K} : \mathbb{A}_K^\times \to Gal\left(L/K\right) \tag{23}$$

homomorfizması inşa etmiş olduk. Bu durumda, izdüşümsel limite geçerek,

$$\varprojlim_{K\subset L\subset K^{sep}} \Theta_{L/K} : \mathbb{A}_K^\times \to Gal\left(K^{ab}/K\right) \tag{24}$$

homomorfizmasını elde ederiz. Bu homomorfizmanın çekirdeği $K^\times$ gurubunu kapsar. Elde edilen homomorfizma, K global cismi için tanımlı olan Θ_K global Artin karşılıklılık yasasıdır. Sonuç olarak, *her v için, K_v üzerinde tanımlı olan lokal Artin karşılıklılık yasaları bize K üzerinde tanımlı global Artin karşılıklılık yasasını verir.*

Langlands karşılıklılık ilkesi
Bu noktada, K lokal veya global cisminin *abelyen-olmayan* Galois genişlemelerinin aritmetik yapılarını da betimleyen, K üzerinde tanımlı, *genel lokal veya global karşılıklılık yasası* nasıl inşa edilmelidir sorusu doğal olarak karşımıza çıkar. Bu soruya en doğru şekilde yaklaşabilmemiz için, abelyen Artin karşılıklılık yasasını *farklı*, fakat denk, bir biçimde formüle edip yorumlamamız gerekmektedir.

Global Artin karşılıklılık yasasının farklı bir formülasyonu
K global cismi için tanımlanmış olan Artin karşılıklılık yasası Θ_K, bize $Gal\left(K^{ab}/K\right)$ topolojik gurubunun $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı olan $Gal\left(K^{ab}/K\right) \to GL(V)$ sürekli indirgenemez temsillerinin kümesi $ITem_{\mathbb{C}}^{(1)}\left(G_K\right)$ ile K global cismi üzerinde tanımlanmış olan

$$\mathbb{A}_K^\times / K^\times \to \mathbb{T} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\right\} \tag{25}$$

sonlu mertebeli Hecke karakterleri kümesi $Oto^{Gal}\left(GL\left(1,\mathbb{A}_K\right)\right)$ arasında bir bijektif eşleme tanımlar. Gerçekten de, $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bir

$$\rho : Gal\left(K^{ab}/K\right) \to GL\left(V\right) \tag{26}$$

sürekli indirgenemez temsili 1-boyutlu olmak zorundadır. Sonuç olarak, (ρ, V) temsili bir $\rho : Gal\left(K^{ab}/K\right) \to \mathbb{C}^\times$ sürekli gurup homomorfizmasıdır. Bu durumda, global Artin karşılıklılık yasası yardımı ile tanımlı olan

$$\rho \circ \Theta_K : \mathbb{A}_K^\times / K^\times \xrightarrow{\Theta_K} Gal\left(K^{ab}/K\right) \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^\times \tag{27}$$

bileşke morfizması, K üzerinde tanımlı sonlu mertebeli bir Hecke karakteridir. Gerçekten de $\rho : Gal\left(K^{ab} / K\right) \to \mathbb{C}^{\times}$ sürekli bir homomorfizma olduğu için, $Im\left(\rho\right)$ imge kümesi $\mathbb{T}$ 'nin sonlu bir altgurubu olmak zorundadır. Sonuç olarak, inşa edilmiş olan

$$\rho \circ \Theta_K : \mathbb{A}_K^{\times} / K^{\times} \to \mathbb{T} \quad (28)$$

tasviri üniter ve sonlu mertebeden bir Hecke karakteridir. Her $\rho \in ITem_{\mathbb{C}}^{(1)}\left(G_K\right)$ için,

$$\rho \mapsto \rho \circ \Theta_K \quad (29)$$

olarak tanımladığımız

$$ITem_{\mathbb{C}}^{(1)}\left(G_K\right) \to Oto^{Gal}\left(GL\left(1, \mathbb{A}_K\right)\right) \quad (30)$$

eşlemesi ayrıca *“doğaldır”,* yani

$$L_{Artin}\left(s, \rho\right) = L_{Hecke}\left(s, \rho \circ \Theta_K\right) \quad (31)$$

eşitliğini de sağlar. Burada $L_{Artin}\left(s, \rho\right)$ ile, $\mathrm{Re}(s) > 1$ yarıdüzlemi üzerinde tanımlı $\rho : Gal\left(K^{ab} / K\right) \to GL(V)$ indirgenemez temsilinin *Artin **L**-fonksiyonu*nu gösteriyoruz. $L_{Hecke}\left(s, \rho \circ \Theta_K\right)$ ise, inşa edilmiş olan $\rho \circ \Theta_K : \mathbb{A}_K^{\times} / K^{\times} \to \mathbb{T}$ Hecke karakterine bağlı olan *Hecke L-fonksiyonu*dur. Bu iki çeşit *L*-fonksiyonunu detaylı olarak ve en genel haliyle, bu bölümün 3. ve 4. kısımlarında inceleyeceğiz. Diğer taraftan, eğer

$$\Lambda_K^{(1)} : ITem_{\mathbb{C}}^{(1)}\left(G_K\right) \to Oto^{Gal}\left(GL\left(1, \mathbb{A}_K\right)\right) \quad (32)$$

her $\rho \in ITem_{\mathbb{C}}^{(1)}\left(G_K\right)$ için

$$L_{Artin}\left(s, \rho\right) = L_{Hecke}\left(s, \Lambda_K^{(1)}\left(\rho\right)\right) \quad (33)$$

şartını sağlayan bir eşleme ise, bu eşleme tek bir tanedir ve Artin karşılıklılık yasası aracılığıyla yukarıda inşa edilmiş olan eşlemedir. Sonuç olarak, global sınıf cisim kuramını (32) numaralı *doğal* eşleşme olarak düşünebiliriz.

Global sınıf cisim kuramını artık (32) numaralı doğal eşleşme olarak düşünelim. *Pontrjagin ikililik* teoremi neticesinde $Gal\left(K^{ab} / K\right)$ kompakt abelyen topolojik gurubu, $Gal\left(K^{ab} / K\right)^{\wedge}$ ile göstereceğimiz $Gal\left(K^{ab} / K\right)$ gurubunun $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı *karakter gurubu* tarafından,

$$\left(Gal\left(K^{ab} / K\right)^{\wedge}\right)^{\wedge} \xrightarrow{\cong} Gal\left(K^{ab} / K\right) \quad (34)$$

izomorfizması altında, *tam olarak betimlenip geri elde edilir*. Bu durumda, $Gal\left(K^{ab} / K\right)^{\wedge} = ITem_{\mathbb{C}}^{(1)}\left(G_K\right)$ eşitliği sonucu, (32)numaralı eşleşmenin $Gal\left(K^{ab} / K\right)$ gurubunun $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı indirgenemez sürekli temsillerini *sadece taban cisim K üzerinde tanımlı* sonlu mertebeli Hecke karakterleri ile parametrize ettiğini görüyoruz. Bu parametrizasyon, (32) numaralı eşleşmenin doğallığı neticesinde, her E / K sonlu abelyen genişlemesine ait olan aritmetik bilgiyi de taban cisim K üzerinde tanımlı Hecke karakterleri cinsinden betimler. Sonuç olarak, *Artin karşılıklılık yasası, Pontrjagin ikililik teoreminin ve Hecke karakterleri kuramının özel bir durumudur.*

Tannaka felsefesi

Abelyen ve yerel-kompakt topolojik guruplar için geçerli olan Pontrjagin ikililik teoremi, Tannaka ve Krein tarafından *abelyen-olmayan ve kompakt* topolojik guruplar için genelleştirilmiştir. Sayılar kuramının en önemli gurubu olarak niteleyebileceğimiz, bir K lokal veya global cismi için (veya genel olarak herhangi bir soyut K cismi için) $Gal\left(K^{sep} / K\right) = G_K$ *mutlak Galois gurubu*, Krull topolojisi altında, bu çeşit topolojik guruplara temel bir örnek oluşturmaktadır.

Herhangi bir G gurubunun bir F cismi üzerinde tanımlanmış sonlu-boyutlu temsillerinin kategorisini $Tem_F\left(G\right)$ ile gösterelim. Bu kategorinin son derece zengin bir yapısı vardır, ve bu yapıyı soyutladığımız zaman *"Tannaka kategorisi"* tanımını elde etmiş oluruz. Eğer G gurubu kompakt bir topolojik gurup ise, Tannaka ve Krein, G gurubunun $Tem_F(G)$ kategorisi tarafından, $Tem_F(G) \rightsquigarrow Vek_F$ unutkan fonktörü vasıtasıyla, *tam olarak betimlenip geri elde edilebileceğini* ispat etmişlerdir. Burada, Vek_F ile, sonlu boyutlu F-vektör uzaylarından oluşan kategoriyi gösteriyoruz. Bu teoreme *Tannaka-Krein ikililik teoremi* denir, ve bu teorem, Pontrjagin ikililik teoreminin, kompakt guruplar için, *abelyen-olmayan* genellemesidir. Detaylar için, bkz. Hewitt ve Ross (1970).

Sonuç olarak, K global cisminin abelyen-olmayan Galois genişlemelerinin aritmetik yapılarını da betimleyen, K üzerinde tanımlı, genel karşılıklılık yasasının, bu bölümün 1. kısmında, K üzerinde tanımlı, global Artin karşılıklılık yasasına denk olduğunu gördüğümüz $\Lambda_K^{(1)} : ITem_{\mathbb{C}}^{(1)}(G_K) \to Oto^{Gal}(GL(1,\mathbb{A}_K))$ doğal eşleşmesinin, Tannaka-Krein ikililik teoremi yardımıyla genelleştirilmesi suretiyle elde edileceğini öngörürüz.

Galois temsilleri ve Artin L-fonksiyonları

Bir K global cismi için, $ITem_{\mathbb{C}}^{(n)}(G_K)$ ile, G_K mutlak Galois gurubunun $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $G_K \to GL(V)$ n-boyutlu sürekli indirgenemez temsillerinin oluşturduğu kümeyi gösterelim. Ayrıca, $ITem_{\mathbb{C}}(G_K)$ ile de, $\bigcup_n ITem_{\mathbb{C}}^{(n)}(G_K)$ birleşimini gösterelim. Bu durumda, G_K topolojik gurubunun $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $G_K \to GL(V)$ sürekli temsillerinden oluşan $Tem_{\mathbb{C}}(G_K)$ kategorisindeki objeler, temsiller üzerinde tanımlı olan $\oplus$ işlemi altında, $ITem_{\mathbb{C}}(G_K)$ kümesinde bulunan objeler tarafından üretilir. G_K gurubu izdüşümsel olarak sonlu olduğu için, bir $\rho : G_K \to GL(V)$ temsilinin sürekli olması için gerek ve yeter şart $Im(\rho) \leq GL(V)$ altgurubunun sonlu olmasıdır. Sonuç olarak $\rho : G_K \to GL(V)$ sürekli temsili, E_ρ/K sonlu bir Galois genişlemesi olması kaydı ile,

$$G_K \to Gal(E_\rho/K) \xrightarrow{injektif} GL(V) \qquad (35)$$

biçiminde parçalanır (Galois temsilleri hakkında detaylı bilgi için bkz. Taylor 2004).

Bir $\rho \in Tem_{\mathbb{C}}(G_K)$ için, Artin'in inşa ettiği, ve *Artin **L**-fonksiyonu* olarak adlandırılan, analitik objeyi inşa edelim (detaylar için bkz. Rogawski 1997). Öncelikle $i_\upsilon : K^{sep} \hookrightarrow K_\nu^{sep}$ aracılığı ile tanımlanan $j_\upsilon : G_{K_\upsilon} \hookrightarrow G_K$ gömmesini alalım. Bu gömme vasıtası ile G_{K_υ} lokal mutlak Galois gurubunun $\rho_\upsilon = \rho \circ j_\upsilon$ sürekli temsilini elde ederiz. Bu temsil, i_υ gömmesinin seçimine bağlıdır. Fakat her bir i_υ gömmesine birbirinin eşleniği olan j_υ gömmeleri karşılık gelecektir. Dolayısı ile, ρ_ν temsilinin denklik sınıfı sadece ν yerine bağlıdır ve iyi tanımlıdır. Elde edilmiş olan ρ_ν temsilleri yardımı ile, ρ temsiline bağlı $L(s,\rho)$ *Artin **L**-fonksiyonunu,* $\mathrm{Re}(s) > 1$ olması kaydı ile

$$L(s,\rho) = \prod_\nu L(s,\rho_\nu) \quad (36)$$

Euler çarpımı şeklinde tanımlanır. Şöyle ki, lokal $L(s,\rho_\upsilon)$ çarpanları:

1. *ν, K global cisminin bir sonlu (henselsel) yeri ise*: k_ν ve k_ν^{sep} cisimleri, sırası ile K_ν ve K_ν^{sep} cisimlerinin kalan-sınıf cisimlerini göstermesi kaydı ile, G_{K_υ} mutlak Galois gurubu k_ν^{sep} cismi üzerine etki eder ve böylece $1 \to I_\nu \to G_{K_\nu} \to G_{k_\nu} \to 1$ kısa tam dizisi elde edilir. Burada I_ν ile G_{K_ν} lokal gurubunun *atalet* altgurubu gösterilmektedir. $q_\nu = |k_\nu|$ olmak üzere, G_{k_ν} içindeki görüntüsü, her $x \in k_\nu^{sep}$ için $x \mapsto x^{q_\nu}$ şeklinde tanımlı otomorfizma olan $Fr_\nu \in G_{K_\nu}$ elemanına G_{K_ν} mutlak Galois gurubunun bir *Frobenius elemanı* adı verilir. G_{K_ν} mutlak Galois gurubunun bir Fr_ν Frobenius elemanının V uzayındaki ataletsel değişmezlerinden olu-

şan V^{I_v} alt uzayına yaptığı $\rho(Fr_v)$ etkisi, Frobenius elemanının seçiminden bağımsızdır. Sonuç olarak, v değerlendirmesinde tanımlı olan $L(s,\rho_v)$ yerel çarpanı,

$$L(s,\rho_v) = \det\left(1 - q_v^{-s}\,\rho_v(Fr_v)\big|_{V^{I_v}}\right)^{-1} \tag{37}$$

şeklinde tanımlanır. $\rho : G_K \to GL(V)$ temsili eğer $\rho_v(I_v) = 1$ şartını sağlıyor ise, (ρ,V) temsili v sonlu yerinde *dallanmamıştır* denir. Bu şart sağlanmıyor ise (ρ,V) temsili v sonlu yerinde *dallanmıştır* denir. (ρ,V) temsili ancak *sonlu sayıda* v sonlu yerinde dallanır. Bu dallanmış sonlu yerler ile sonsuz (arşimetsel) yerlerden oluşan kümeyi $S(\rho)$ ile gösterelim. Eğer $v \notin S(\rho)$ ise, $\rho_v(Fr_v) \in GL(V)$ elemanı herhangi bir $Fr_v \in G_{K_v}$ Frobenius elemanının seçiminden bağımsızdır. Sonuç olarak $\rho_v(Fr_v)$, V üzerinde tanımlı sonlu mertebeli bir lineer operatördür. V vektör uzayının $\mathbb{C}$ üzerinde sıralı bir bazının sabitlenmesi ile, $GL(V)$ ile $GL(n,\mathbb{C})$ gurupları arasında elde edilen izomorfizma altında

$$\rho_v(Fr_\rho) \sim \begin{pmatrix} \zeta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \zeta_n \end{pmatrix} \tag{38}$$

eşlenikliği mevcuttur. Burada n ile V temsil uzayının $\mathbb{C}$ üzerindeki boyutunu, $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ ile de belli birim kökleri gösteriyoruz. Bu gözlem neticesinde, (ρ,V) Galois temsili, $v \notin S(\rho)$ kümesi tarafından indekslenmiş, $GL(n,\mathbb{C})$ içinde, yarı-basit $\{\rho_v(Fr_v)\}$ eşlenik sınıflarından oluşan kümeyi tanımlar. *Chebotarev yoğunluk teoremi* sonucu bu küme, (ρ,V) Galois temsilini *tek türlü olarak* betimler.

2. v *sonsuz (arşimetsel) ise*: $K_v \cong \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olur. $K_v \cong \mathbb{R}$ olması durumunda, c kompleks eşlenik fonksiyonunu göstermesi kaydı ile $G_{K_v} \simeq Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1,c\}$ olur. Diğer taraftan $\rho_v(c)$ temsilinin özdeğerleri de $+1$ veya -1 olur. m_+ ve m_- sırasıyla $+1$ ve -1 özdeğerlerinin sayısını göstermek üzere $L(s,\rho_v)$ yerel çarpanı

$$L(s,\rho_v) = \left(\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\right)^{m_+}\left(\pi^{-(s+1)/2}\Gamma((s+1)/2)\right)^{m_-} \tag{39}$$

eşitliği olarak tanımlanır. Eğer $K_v \cong \mathbb{C}$ ise, $G_{K_v} \cong \{1\}$ olur. Bu durumda $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ olmak üzere $L(s,\rho_v)$ yerel çarpanı,

$$L(s,\rho_v) = \left(2(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\right)^n \tag{40}$$

olarak tanımlanır. Artin ***L***-fonksiyonlarının arşimetsel lokal çarpanları genel olarak *Hodge kuramı* aracılığı ile tanımlanır.

Artin ***L***-fonksiyonlarının, lokal Euler faktörleri yardımı ile inşa edildiğini, ancak sonlu lokal faktörler ile sonsuz lokal faktörlerin çok farklı şekilde inşa edildiklerini gördük. Deninger'in çalışmaları (bkz. Deninger 1994), sonlu lokal faktörler ve sonsuz lokal faktörlerin *regülarize determinantlar kuramı* yardımı ile aslında *aynı formül* ile elde edilebileceğini göstermiştir.

Galois temsillerine bağlı, Artin ***L***-fonksiyonlarının inşasını gördükten sonra, şimdi bu fonksiyonların temel özelliklerini inceleyelim. Bunun için ilk olarak temsiller üzerinde tanımlı işlemleri özetlememiz gerekmektedir.

Temsiller üzerinde tanımlı işlemler:

1. *Direkt toplam*: $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$
2. *Tensör çarpım*: $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}$
3. *Kısıtlama*: $\chi_{\mathrm{Res}_H^G \rho} = \chi_\rho\big|_H$. Burada $\mathrm{Res}_H^G \rho$ ile G için tanımlanmış olan ρ temsilinin H altgurubuna kısıtlanmasını gösteriyoruz.

4. $\chi_{\rho^\vee} = \overline{\chi_\rho}$. Burada $\rho^\vee$ temsili, her $g \in G$ için $\rho^\vee(g) = {}^t\rho(g^{-1})$ eşitliği ile tanımlıdır.
5. *Yaptırılmış temsiller*: $\rho \in Tem_{\mathbb{C}}(H)$ olsun. $Ind_H^G \rho \in Tem_{\mathbb{C}}(G)$ ile her $h \in H$ ve $g \in G$ için $f(hg) = \rho(h) f(g)$ şartını sağlayan $f : G \to V_\rho$ fonksiyonlarından oluşan uzayı $Ind_H^G V_\rho$ ile gösterelim. Bu durumda $Ind_H^G \rho : G \to GL(Ind_H^G V_\rho)$ yaptırılmış temsili, her $g \in G$ için,

$$\left(\left(Ind_H^G(\rho)\right)(g)f\right)(g') = f(g'g), \tag{41}$$

$g' \in G$, $f \in Ind_H^G V_\rho$ şeklinde tanımlanır.

Bu işlemler altında Artin ***L***-fonksiyonu aşağıda sıralayacağımız şekillerde davranır:

1. *Direkt toplam*:

$$L(s, \rho_1 \oplus \rho_2) = L(s, \rho_1) L(s, \rho_2) \tag{42}.$$

2. *Yaptırılmış temsiller*: $K \subseteq K' \subseteq K''$ genişlemeleri ve bu genişlemelere karşılık gelen $G = Gal(K''/K)$ ve $H = Gal(K''/K')$ gurupları ve $\rho \in Tem_{\mathbb{C}}(H)$ için,

$$L(s, Ind_H^G \rho) = L(s, \rho) \tag{43}$$

3. *Enflasyon*: $K \subseteq K' \subseteq K''$ genişlemeleri ve bu genişlemelere karşılık gelen $G = Gal(K''/K)$ ve $H = Gal(K'/K)$ gurupları ve $\rho \in Tem_{\mathbb{C}}(H)$ için, G gurubunun

$$\rho' : G \xrightarrow{res_{K'}} H \xrightarrow{\rho} GL(V) \tag{44}$$

temsili vardır. Bu durumda

$$L(s, \rho') = L(s, \rho) \tag{45}$$

eşitliği sağlanır.

Artin ***L***-fonksiyonlarının meromorf devamını elde etmek için *Brauer yaptırım teoremi* ile problem 1-boyutlu temsillerin Artin ***L***-fonksiyonlarına indirgenir. Önceden özetlediğimiz global Artin karşılıklılık yasasının analitik formülasyonu yardımı ile de 1-boyutlu Artin ***L***-fonksiyonları sonuç olarak birer Hecke ***L***-fonksiyonudur. Hecke ***L***-fonksiyonlarının analitik devamı yapılabildiği için de genel Artin ***L***-fonksiyonlarının meromorf devamını elde ederiz. Detaylar için bkz. Brauer (1947). Artin ***L***-fonksiyonu $L(s, \rho)$ yardımı ile, $\mathrm{Re}(s) > 1$ olması kaydı ile

$$\left\{|d_K|^{\chi_\rho(1)} N\mathfrak{f}(\chi_\rho)\right\}^{s/2} L(s, \rho) =: \Lambda(s, \rho) \tag{46}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada d_K ile K cisminin *diskriminantını* ve $\mathfrak{f}(\chi_\rho)$ ile ρ temsiline bağlı χ_ρ karakterinin *kondüktörünü* (bu, O_K tamsayılar halkası içinde bir idealdir, ve lokal cisimlerin yüksek dallanma kuramı yardımı ile tanımlanmaktadır) gösteriyoruz.

Teorem. $\mathrm{Re}(s) > 1$ *için tanımlı olan* $\Lambda(s, \rho)$ *fonksiyonunun tüm kompleks düzleme meromorf devamı vardır ve*

$$\Lambda(1 - s, \rho) = W(\rho) \Lambda(s, \rho^\vee) \tag{47}$$

fonksiyonel denklemini sağlar. Daha önce de belirtildiği gibi, G_K *gurubunun* $\rho^\vee$ *temsili her* $g \in G_K$ *için* $\rho^\vee(g) = {}^t\rho(g^{-1})$ *eşitliği ile tanımlıdır.* $W(\rho) \in \mathbb{C}^\times$ *sayısı da* $|W(\rho) = 1|$ *şartını sağlar, ve bu sayıya Artin kök sayısı denir.*

Yukarıdaki teoremde bahsi geçen $W(\rho)$ Artin kök sayısı, $L(s, \rho)$ Artin ***L***-fonksiyonunun son derece önemli ve ilginç bir değişmezidir. Bu değişmezin temel özellikleri:

1. $W(\rho_1 \oplus \rho_2) = W(\rho_1) W(\rho_2)$

2. $W\left(Ind_H^G\rho\right)=W(\rho)$
3. $W\left(\rho^{\vee}\right)=\overline{W(\rho)}$

şeklinde sıralanabilir.

G_K gurubunun ρ temsiline bağlı $L(s,\rho)$ Artin ***L***-fonksiyonu için tanımladığımız $\Lambda(s,\rho)$ fonksiyonunu tanımlamadan, fonksiyonel denklemi

$$L(s,\rho)=\varepsilon(s,\rho)L\left(1-s,\rho^{\vee}\right) \tag{48}$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada $\varepsilon(s,\rho)$ fonksiyonuna $\rho:G_K\to GL(V)$ temsiline bağlı *epsilon faktörü* denir. Detaylar için bkz. Tate (1979).

$GL(n,\mathbb{A}_K)$ grubunun otomorf temsilleri ve standart *L*-fonksiyonları

K sayı cisminin her v yeri için K_v, K sayı cisminin v yerine göre tamlanışı olsun. $\mathbb{A}_K$ K sayı cisminin adeller halkası olsun. Bu bölümde G ile genel lineer gurup $GL(n)$ cebirsel gurubu, $G(\mathbb{A}_K)$ ile de G cebirsel gurubunun $\mathbb{A}_K$-rasyonel noktalarından oluşan gurup anlaşılacaktır. $G(\mathbb{A}_K)$ gurubu, adel topolojisi altında yerel kompakt bir topolojik guruptur ve $\Delta:G(K)\hookrightarrow G(\mathbb{A}_K)$ gömmesi altında $G(K)$, $G(\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun kesikli bir altgurubu olur. Yerel kompakt topolojik gurubumuz $G(\mathbb{A}_K)$ üzerinde tanımlı bir $d\mu$ Haar ölçümü sabitleyelim. Sabit ettiğimiz bu $d\mu$ ölçümü altında $G(K)\diagdown G(\mathbb{A}_K)$ bölüm uzayı sonlu hacime sahip değildir. Fakat, $G(\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun merkezi

$$Z(\mathbb{A}_K)=\left\{\begin{pmatrix} z & & \\ & \ddots & \\ & & z\end{pmatrix}: z\in\mathbb{A}_K^{\times}\right\} \tag{49}$$

yardımı ile, $Z(\mathbb{A}_K)G(K)\diagdown G(\mathbb{A}_K)$ olarak tanımlanan bölüm uzayı, $d\mu$ ölçümü altında sonlu hacime sahiptir.

Bir $\psi:K^{\times}\backslash\mathbb{A}_K^{\times}\to\mathbb{C}^{\times}$ Hecke karakteri için, $H=L^2\left(G(K)\backslash G(\mathbb{A}_K),d\mu;\psi\right)$ ile

1. her $g\in G(K)\backslash G(\mathbb{A}_K)$, $z\in Z(\mathbb{A}_K)$ için $\varphi(zg)=\psi(z)\varphi(g)$;
2. $\int_{Z(\mathbb{A}_K)G(K)\backslash G(\mathbb{A}_K)}|\varphi(g)|^2 d\mu(g)<\infty$

şartlarını sağlayan $\varphi:G(K)\backslash G(\mathbb{A}_K)\to\mathbb{C}$ kare-integrallenebilir fonksiyonlardan oluşan Hilbert uzayını gösterelim. $H_o=L_o^2\left(G(K)\backslash G(\mathbb{A}_K),d\mu;\psi\right)$ ile de H Hilbert uzayı içinde

3. $G(\mathbb{A}_K)$ gurubunun her P *parabolik* altgurubu için, ve her $g\in G(\mathbb{A}_K)$ için,
$$\int_{N_P(K)\diagdown N_P(\mathbb{A}_K)}\varphi(ng)d\mu(n)=0$$

şartını sağlayan $\varphi:G_K\diagdown G(\mathbb{A}_K)\to\mathbb{C}$ fonksiyonlarından oluşan Hilbert altuzayını gösterelim. Burada $G=GL(n)$ gurubunun $P_{n_1,\cdots n_s}$ standart parabolik altgurupları ile, n tamsayısının $n=n_1+\cdots+n_s$ parçalanışları arasında, $M_{n_j}\in M\left(n_j,\mathbb{A}_K\right)$ olması kaydı ile

$$(n_1,\cdots,n_s)\leftrightarrow P_{n_1,\cdots n_s}=\left\{\begin{pmatrix} M_{n_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & M_{n_s}\end{pmatrix}\right\} \tag{50}$$

şeklinde bire-bir eşleme vardır. G gurubunun $P_{n_1,\cdots n_s}$ altgurubunun herhangi bir eşleniğine de G gurubunun parabolik altgurubu denir.

$G(\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun H uzayı içindeki *sağ regüler temsili* ile, her $x_0,x\in G(\mathbb{A}_K)$, $\varphi\in H$ için

$$\left[R(x_0)\right](\varphi)\left(G(K)x\right)=\varphi\left(G(K)xx_0\right) \tag{51}$$

şeklinde tanımlı

$$R:G(\mathbb{A}_K)\to GL(H) \tag{52}$$

homomorfizmasını anlıyoruz. Bu (R,H) temsili, $G(\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun *üniter* bir temsilidir.

Tanım. $G(\mathbb{A}_K)$ *adel gurubunun* (R,H) *sağ regüler temsilinin herhangi bir* π *altbölüm temsiline bir otomorf temsil denir.*

Genel temsil kuramından hatırlayacağımız gibi, bir M gurubunun $(\rho, V/\mathbb{C})$ temsilleri ile $\mathbb{C}[M]$-modülleri aynı objelerdir. Bir $\mathbb{C}[M]$-modülü V verilsin ve W bir alt modül olsun. Bu durumda V/W doğal bir $\mathbb{C}[M]$-modülüdür (bölüm modülü). İnşa ettiğimiz bu modülün herhangi bir Q ile göstereceğimiz $\mathbb{C}[M]$-altmodülüne de V modülünün bir altbölüm modülü denir.

$G(\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun H_o uzayı içindeki sağ regüler temsili benzeri şekilde tanımlanır. Şimdi $G(\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun otomorf temsillerinin özel bir hali olan uç otomorf temsillerini tanımlayalım.

Tanım. $G(\mathbb{A}_K)$ *adel gurubunun* (R,H_o) *sağ regüler temsilinin herhangi bir* π *alt temsiline bir uç otomorf temsil denir.*

Bir $\pi:G(\mathbb{A}_K)\to GL(W)$ temsili eğer $G(\mathbb{A}_K)$ gurubunun her maksimal kompakt altgurubu C için

$$\pi|_C=\bigoplus_{\lambda\in ITem(C)} m(\lambda)\lambda \tag{53}$$

şartını sağlıyor ise, $G(\mathbb{A}_K)$ gurubunun (π,W) temsili *makuldür* denir. Makul temsillerin son derece basit bir karakterizasyonu vardır.

Teorem.(Flath) $G(\mathbb{A}_K)$ *adel gurubunun her indirgenemez makul temsili* (π,W) *için,*

$$\pi\simeq\otimes'_v\pi_v \tag{54}$$

olacak şekilde $G_v=GL(n,K_v)$ *lokal gurubunun* π_v *indirgenemez temsilleri mevcuttur ve*

$$\pi\simeq\otimes'_v\pi_v\simeq\otimes'_v\pi'_v\Rightarrow\pi_v\simeq\pi'_v \tag{55}$$

tekillik şartını sağlar.

Eğer (π,W) temsili indirgenemez, makul bir temsil ise, Flath'ın teoremi neticesinde elde edilen

$$\pi\simeq\otimes'_v\pi_v \tag{56}$$

tensör çarpımı ayrışımındaki $G(K_v)$ lokal guruplarının π_v temsilleri, hemen hemen her sonlu v için, *dallanmamış esas seri temsilleridir.* $\underline{z}=(z_1,...,z_n)\in\mathbb{C}^n$ olması kaydı ile, $G(K_v)$ lokal gurubunun

$$B(K_v)=\left\{\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\in G(K_v)\right\} \tag{57}$$

üst-üçgensel matrislerden oluşan *Borel altgurubunun*

$$\chi_{\underline{z}}:\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\mapsto |b_1|_v^{z_1}\cdots|b_n|_v^{z_n} \tag{58}$$

karakterinden elde edilen

$$\tilde{\pi}_{v,\underline{z}}=Ind_{B(K_v)}^{G(K_v)}\chi_{\underline{z}} \tag{59}$$

yaptırılmış temsilinin, *Langlands sınıflandırması* sonucu, tek bir tane indirgenemez $\pi_{v,\underline{z}}$ bölüm temsili mevcuttur. $G(K_v)$ lokal gurubunun bu temsillerine dallanmamış esas seri temsilleri denir.

Sonlu bir v yeri için, $G(K_v)$ lokal gurubunun bir $\pi_v = \pi_{v,\underline{z}}$ $(\underline{z} \in \mathbb{C}^n)$ dallanmamış esas seri temsilini alalım. Bu temsilden, $GL(n,\mathbb{C})$ gurubu içinde

$$\sigma(\pi_v) = \begin{pmatrix} q_v^{-z_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_v^{-z_n} \end{pmatrix} \tag{60}$$

diyagonal matrisinden elde edilen eşlenik sınıfını türetelim. Bu sınıfa π_v temsilinin *Langlands sınıfı* denir ve bu eşlenik sınıfı sadece π_v temsilinin denklik sınıfına bağlıdır ve denk olmayan dallanmamış esas seri temsilleri $GL(n,\mathbb{C})$ içinde farklı eşlenik sınıfları tanımlar. Bu gözlem neticesinde, $G(\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun bir $\pi = \otimes'_v \pi_v$ indirgenemez, makul otomorf temsili için ***L***-fonksiyonu (bunlara standart ***L***-fonksiyonu denir), $\operatorname{Re}(s) > 1$ olması kaydı ile,

$$L_S(s,\pi) = \prod_{v \notin S} L_v(s,\pi) \tag{61}$$

Euler çarpımı olarak tanımlanır. Burada S ile K global cisminin sonsuz ve sonlu dallanmış yerlerin kümesini gösteriyoruz. Flath'ın teoremi neticesinde S sonlu bir kümedir. $v \notin S$ durumunda, lokal ***L***-fonksiyonu

$$L_v(s,\pi) = \det\left(1 - \sigma(\pi_v) q_v^{-s}\right)^{-1} \tag{62}$$

karakteristik polinomu ile tanımlanır.

Teorem(Godement-Jacquet). *Verilen $G(\mathbb{A}_K) = GL(n,\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun aşikar olmayan bir uç otomorf temsili π olsun. $\operatorname{Re}(s) > 1$ için tanımlı olan $L_S(s,\pi)$ fonksiyonunun tüm kompleks düzleme meromorf devamı vardır ve*

$$L_S(s,\pi) = \varepsilon_S(s,\pi) L_S(1-s,\pi^\vee) \tag{63}$$

*fonksiyonel denklemini sağlar. Burada $\pi^\vee$ ile π temsilinden elde edilen $G(\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun belli bir temsilini gösteriyoruz. Dahası, $n \neq 1$ ise, tüm düzleme devam edilmiş olan $L(s,\pi)$ fonksiyonu tam bir fonksiyondur. $n = 1$ ise, $L(s,\pi)$ fonksiyonu Hecke **L**-fonksiyonudur.*

Global Artin karşılıklılık yasasının farklı bir formülasyonu olarak (32) numaralı doğal eşlemeyi görmüştük. Burada, daha önce de belirttiğimiz gibi, bu eşlemenin doğallığı ile iki farklı rejimde (Galois rejimi ve Hecke rejimi) inşa edilen ***L***-fonksiyonlarının (33) numaralı denklemdeki eşitliğini anlıyoruz. $GL(n,\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun otomorf temsiller kuramı, $n = 1$ durumunda, $GL(1,\mathbb{A}_K) = \mathbb{A}_K^\times$ idel gurubunun Hecke karakterleri kuramıdır. **Langlands karşılıklılık ilkesi** *Verilen her indirgenemez aşikar olmayan ve n-boyutlu Galois temsili $\rho : G_K \to GL(V)$ için* $GL(n,\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun *öyle bir π_ρ uç otomorf temsili vardır ki,*

$$\Lambda_K^{(n)} : \rho \mapsto \pi_\rho \tag{64}$$

eşlemesi

$$L(s,\rho) = L(s,\pi_\rho) \tag{65}$$

ve

$$\varepsilon(s,\rho) = \varepsilon(s,\pi_\rho) \tag{66}$$

eşitliklerini sağlar.

Bu ilkenin doğruluğu, Godement-Jacquet teoremi sonucu, bize meşhur *Artin holomorfi sanıtı*nın da doğruluğunu verir. Bu sanıt, G_K mutlak Galois gurubunun indirgenemez aşikar olmayan ve n-boyutlu Galois temsili ρ için tanımlı $L(s,\rho)$ Artin ***L***-fonksiyonunun tüm kompleks düzleme *holomorf* devamının varlığını öngörmektedir. Bu doğrultuda, $n = 2$ durumunda Langlands'ın kendi geliştirdiği *taban* *değiştirme kuramı* ile elde ettiği sonuçlar (Langlands 1980), Tunnell ve R.Taylor tarafından yapılmış çalışmalar, elde edilmiş olan en önemli sonuçlardır (Tunnell, 1981; Taylor 1997; Buzzard vd., 2001).

Bu çalışmada K global cismini her zaman sayı cismi olarak ele aldık. Bu durumda, bu ilke hakkında pek az sonuç elde edilmiştir. Diğer taraftan K global cisminin fonksiyon cismi olması durumunda ise (yani $kar(K) = p > 0$), L.Lafforgue (Lafforgue 2002), V.G.Drinfeld'in çalışmalarını (Drinfeld 1977) kullanarak Langlands karşılıklılık ilkesini ispat etmiştir.

$n=1$ durumunda da görüleceği gibi G_K mutlak Galois gurubunun $\mathbb{C}$ üzerinde 1-boyutlu sürekli temsilleri, $\mathbb{A}_K^\times$ idel gurubunun $\mathbb{C}^\times$ değerli sürekli karekterlerinden daha az sayıdadır. Gerçekten de 1-boyutlu sürekli Galois temsillerinin imgesi sonlu bir gurup olacağından, Artin karşılıklılık yasası altında eşleyeceğimiz Hecke karakteri de sonlu imge gurubuna sahip olmalıdır. Dolayısı ile, gerçekten "Galois temsilleri" ile uç otomorf temsiller arasında bijektif ve doğal bir eşleme kurulması için G_K mutlak Galois gurubunu genişletmemiz gerekmektedir. Bu gözlem doğrultusunda Langlands'ın karşılıklılık ilkesinin olabilecek en genel halini şu şekilde ifade edebiliriz (detaylar için bkz. Clozel 1990, Cogdell 2003, Langlands 1979, ve Ramakrishnan 1994).

Genel Langlands karşılıklılık ilkesi. *Sayı cismi K için öyle bir evrensel gurup $\mathcal{L}_K$ vardır ki, belli bir kompleks izdüşümsel olarak küçülebilir gurup $\mathcal{L}_K^0$ için, $\mathcal{L}_K$,*

$$1 \to \mathcal{L}_K^0 \to \mathcal{L}_K \to G_K \to 1 \tag{67}$$

kısa tam dizisine oturur. Bu dizi, $\mathcal{M}_K$ motifik Galois gurup olması kaydı ile

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathcal{L}_K^0 & \to & \mathcal{L}_K & \to & G_K & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & \mathcal{M}_K^0 & \to & \mathcal{M}_K & \to & G_K & \to & 1 \end{array} \tag{68}$$

değişmeli diyagramını sağlamalıdır. Bu durumda, genel Langlands karşılıklılık ilkesi ile

$$ITem_{\mathbb{C}}^{(n)}(G_K) \leftrightarrow UO^{Gal}(GL(n,\mathbb{A}_K)) \tag{69}$$

$$ITem_{\mathbb{C}}^{(n)}(\mathcal{M}_K) \leftrightarrow UO^{Cebirsel}(GL(n,\mathbb{A}_K)) \tag{70}$$

$$ITem_{\mathbb{C}}^{(n)}(\mathcal{L}_K) \leftrightarrow UO(GL(n,\mathbb{A}_K)) \tag{71}$$

doğal birebir eşlemeleri öngörülmektedir. Burada $ITem_{\mathbb{C}}^{(n)}(G)$ ile, bir G gurubunun $\mathbb{C}$ üzerinde indirgenemez n-boyutlu temsillerinin kümesini, $UO(GL(n,\mathbb{A}_K))$ ile $GL(n,\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun uç otomorf temsillerinin kümesini gösteriyoruz. $GL(n,\mathbb{A}_K)$ adel gurubunun cebirsel uç otomorf ve Galois-tipi uç otomorf temsillerinin kümelerini ise sırasıyla $UO^{Cebirsel}(GL(n,\mathbb{A}_K))$ ve $UO^{Gal}(GL(n,\mathbb{A}_K))$ olarak gösteriyoruz. Her zamanki gibi (69), (70) *ve* (71) *numaralı eşlemelerin doğallığı ile, temsillere kaşılık gelen **L**-fonksiyonlarının ve ε faktörlerinin bu eşlemeler altında korunması ve lokal cisimler için Langlands eşlemesi ile uyumlu olması anlaşılmalıdır.*

Genel Langlands karşılıklılık ilkesi ile ilgili şu ana kadar çok az sonuç elde edilebilmiştir. Bu genel ilkede bahsi geçen *hipotetik* guruplar $\mathcal{L}_K$ ve $\mathcal{M}_K$ için bkz. Arthur 2002, Ramakrishnan 1994.

Kaynaklar

Arthur, J., (2003). The principle of functoriality, *Bulletin of the American Mathematical Society (N.S.),* **40**, 39-53.

Arthur, J., (2002). A note on the automorphic Langlands group, *Canadian Mathematical Bulletin,* **45,** 4, 466-482.

Arthur, J., (1981). Automorphic representations and number theory, *1980 Seminar on Harmonic Analysis (Montreal Quebec 1980),* C.M.S. Conf. Proc., **1**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 3-51.

Brauer, R., (1947). On Artin's ***L***-series with general group characters, *Annals of Mathematics.,* **48**, 502-514.

Buzzard, K., Dickinson, M., Shepherd-Barron, N., Taylor, R., (2001). On Icosahedral Artin representations, *Duke Mathematical Journal,* **109**, 2, 283-318.

Cassels, J. W. S. ve Fröhlich, A., (1967). *Algebraic Number Theory,* Academic Press, New York, USA.

Clozel, L., (1990). Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité, *Automorphic forms, Shimura varieties and **L**-functions Vol. 1 (Ann Arbor, MI, 1988) (Eds. Clozel L., Milne J.), Perspective on Mathematics*, **10,** Academic Press, Boston, M.A., 77-159.

Cogdell, J. W., (2003). Langlands conjectures for GL_n, *An introduction to the Langlands program (Jerusalem 2001),* Birkhäuser Boston, Boston, M.A., 229-249.

Deninger, C., (1994). Motivic ***L***-functions and regularized determinants, *Motives,* A.M.S. Proc. Sympos. Pure Mathematics, **55** (part 1), A.M.S., Providence, R.I., 704-743.

Drinfeld, V. G., (1977). A proof of Langlands' global conjecture for $GL(2)$ over a function-field, *Funkcional. Anal. i Priložen.,* **11,** 3, 74-75.

Flath , D., (1979). Decomposition of representations into tensor products, *Automorphic Forms, Representations and **L**-Functions,* A.M.S. Proc. Sympos. Pure Math., **33**(part 1), A.M.S., Providence, R.I., 179-183.

Godement, R., Jacquet H., (1972). *Zeta functions of simple algebras,* Lecture Notes in Mathematics, **260**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Hewitt, E. ve Ross, K., A., (1970). *Abstract Harmonic Analysis Vol. 2: Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact abelian groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Lang, S., (1994). *Algebraic Number Theory. 2nd edition* , Graduate Texts in Mathematics, **110**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Lafforgue, L., (2002). Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlans, *Inventiones Mathematicae,* **147**, 1, 1-241.

Langlands, R. P., (1980).*Base change for* $GL(2)$, Annals of Mathematics Studies, **96**, Princeton University Press, Princeton, N.J.

Langlands, R. P., (1979). Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen, *Automorphic Forms, Representations and **L**-Functions,* A.M.S. Proc. Sympos. Pure Mathematics, **33**(part 2), A.M.S., Providence, R.I., 205-246.

Langlands, R. P., (1970). Problems in the theory of automorphic forms, *Lectures in modern analysis and applications III,* Lecture Notes in Mathematics, **170**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 18-61.

Neukirch, J., (1999). *Algebraic Number Theory,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Poonen, B., (2006). A brief summary of the statements of class field theory, *U. C. Berkeley preprint.*

Ramakrishnan, D., (1994). Pure motives and automorphic forms, *Motives,* A.M.S. Proc. Sympos. Pure Math., **55** (part 2), A.M.S., Providence, R.I., 411-446.

Rogawski, J., (1997). Functoriality and the Artin conjecture, *Representation theory and automorphic forms (Edinburgh, 1996),* A.M.S. Proc. Sympos. Pure Math., **61**, A.M.S., Providence, R.I., 331-353.

Tate, J., (1979). Number theoretic background, *Automorphic Forms, Representations and **L**-Functions,* A.M.S. Proc. Sympos. Pure Math., **33**(part 2), A.M.S., Providence, R.I., 3-26.

Taylor, R., (2004). Galois representations, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, **13,** 1, 73-119.

Taylor, R., (1997). Icosahedral Galois representations, Olga Taussky-Todd: In memoriam. *Pacific J. Math., Special Issue*, 337-347.

Tunnell, J., (1981). Artin's conjecture for representations of octahedral type, *Bulletin of the American Mathematical Society (N.S.),* **5,** 2, 173-175.