itüdergisi/**c**
fen bilimleri
Cilt:4, Sayı:1, 85-94
Kasım 2006

Birlikte kompakt operatör ailelerinin değişmez altuzayları üzerine

Tunç MISIRLIOĞLU*, Şafak ALPAY
İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bir X Banach uzayı üzerinde tanımlı sınırlı doğrusal $T: X \to X$ operatörünün aşikar olmayan (yani $\{0\}$ ve X ten farklı) kapalı (hiper)değişmez altuzaya sahip olup olmaması, 'değişmez altuzay problemi' olarak bilinir. Burada X in bir Y altuzayının T operatörü altında değişmez kalması $T(Y) \subseteq Y$, hiperdeğişmez kalması ise T ile değişmeli her operatör altında değişmez kalmasıdır. Tek bir T operatörü yerine bu operatörlerin bir M ailesi göz önüne alındığında, Y nin M altında (hiper)değişmez kalması, M ailesine ait her operatör altında (hiper)değişmez olmasıdır. U_X, X in kapalı birim yuvarını göstermek üzere, $M(U_X) = \{Tx : x \in U_X\}$ kümesi önkompakt ise M ailesine birlikte kompakt denir. Bu çalışmada doğrusal operatörlerin birlikte kompakt ailelerinin (hiper)değişmez altuzayları araştırılmaktadır. Kompakt operatörlerin önkompakt ailesi birlikte kompaktır ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Kompakt operatörlerin önkompakt aileleri için bilinen bazı değişmez altuzay sonuçları, birlikte kompakt operatör ailelerine genişletilmektedir. Bunu yaparken, $\rho(M)$ Rota-Strang spektral yarıçapı, $r(M)$ Berger-Wang spektral yarıçapı ve X deki sıfırdan farklı bir x elemanı için $\rho(M, x)$ yerel spektral yarıçapı kullanılmaktadır. Ayrıca $\mathrm{alg}\Gamma$ daki birlikte kompakt M ailesinin, $\rho(M) = r(M)$ Berger-Wang formülünü sağladığı gösterilmektedir; burada Γ, X in altuzaylarının tam zincirini ve $\mathrm{alg}\Gamma$, Γ daki tüm altuzayları değişmez bırakan operatörlerin kümesini göstermektedir.

Anahtar kelimeler: *Değişmez altuzay, birlikte kompakt kümeler, ortak spektral yarıçap.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Tunç MISIRLIOĞLU. tunc@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 64.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Banach uzayları ve Banach örgüleri üzerinde tanımlı operatör aileleri için değişmez altuzay teoremleri" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 20.06.2006 tarihinde dergiye ulaşmış, 13.07.2006 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.06.2007 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

On invariant subspaces of collectively compact sets of linear operators

Extended abstract

Given a Banach space X and a bounded linear operator $T: X \to X$, X may or may not have a closed subspace Y, other than $\{0\}$ and X, which is left invariant under T, that is, $T(Y) \subset Y$. This work is concerned with this problem which is commonly known as the invariant subspace problem. However, instead of taking a single operator T, we consider a family M of linear bounded operators on infinite dimensional Banach spaces which are tied together with a strong compactness condition, known as collective compactness and we look for a common invariant subspace of elements of M.

A family M of operators is called collectively compact if the closure of the closed unit ball U_X of X is compact under the action of M. That is, $\overline{\bigcup_{T \in M} T(U_X)}$ is compact in X. Using well-known techniques, we generalize invariant subspace results which are proven for precompact families of compact operators to collectively compact families of operators. In doing so, we use joint spectral radius $\rho(M)$, Berger-Wang spectral radius $r(M)$ of M and the local joint spectral radius $\rho(M,x)$ for a non-zero x in X.

A common technique to show that a multiplicative semigroup $SG(M)$ generated by M has a common invariant subspace is to show that $SG(M)$ has a non-zero semigroup ideal which has a non-trivial closed invariant subspace. Employing this technique and introducing a semigroup ideal $lim(M)$ in the multiplicative semigroup $SG(M)$, we show that if M is collectively compact and $r(M) < 1$ then $SG(M)$ has an invariant subspace. Another results in this direction are the ones which yield a common invariant subspace for a collectively compact family M of operators if

$$\rho(M,x) < \sup_{T \in M^n} \{\rho(T)\}^{\frac{1}{n}} \text{ and } \rho(M,x) < r(M)$$

for some non-zero x in X.

If, on the other hand, M is collectively compact and $\rho(M) = 1$, then we show that $SG(M)$ has a common invariant subspace. Another case where collectively compact family M has a common invariant subspace is when $\rho(M) = 1$ and $SG(M)$ is not bounded.

In the final part of the work, we consider a complete chain Γ of closed subspaces of X and show that if M is a collectively compact family in $alg_t\Gamma$ then we have $\rho(M) \le t$. Here, $alg\Gamma$ denotes the set of operators that leave all the subspaces in Γ invariant and $alg_t\Gamma$ denotes the set of all operators $T \in alg\Gamma$ satisfying $dist(Tz, Z_-) \le t\|z\|$ for any gap (Z_-, Z) in Γ and all $z \in Z$. As a result of this, we relate the joint spectral radius $\rho(M)$ to Ringrose's diagonal numbers for triangularizable collectively compact sets of operators:

$$\rho(M) = \sup\{\rho(T) : T \in M\}.$$

The arbitrary complete chains of invariant subspaces for collectively compact sets of operators are then considered, and the joint spectral radius $\rho(M)$ is compared with joint spectral radii of sets induced by M in the quotient spaces corresponding to the gaps of the chain. So we first show that that if M is a collectively family in $alg\Gamma$ and $\varepsilon > 0$, then there exists only a finite number of gaps (Z_-, Z) of the chain Γ such that $\|M|gap(Z)\| > \varepsilon$. And by using this result we obtain that if M is a collectively family in $alg\Gamma$, then we have

$$\rho(M) = \rho(M|\Gamma) = \max\{\rho(M|gapZ) : Z \in \Gamma\}.$$

We finally show that the Berger-Wang formula $\rho(M) = r(M)$ holds for a collectively compact family M in $alg\Gamma$ where Γ is a complete chain of subspaces.

Keywords: *Invariant subspace, collectively compact set, joint spectral radius.*

Giriş ve önbilgiler

Bu çalışma boyunca X ile sonsuz boyutlu Banach uzayı, $B(X)$ ile X üzerinde tanımlı tüm doğrusal sınırlı operatörler uzayı ve U_X ile X deki kapalı birim yuvar gösterilecektir.

$A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A nın her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahip ise A ya kompakt küme denir. Eğer A nın kapanışı olan $\overline{A}$ kümesi kompakt ise A ya önkompakt küme denir. Ayrıca $T \in B(X)$ operatörü için, $T(U_X)$ kümesi önkompakt ise T ye kompakt operatör adı verilir.

Tanım: Operatörlerin bir $M \subset B(X)$ ailesi verilsin. Eğer $M(U_X) = \{Tx : T \in B(X), x \in U_X\}$ kümesi önkompakt ise, M ailesine birlikte kompakt denir.

Kompakt operatörlerin önkompakt kümesi birlikte kompaktır (Anselone, 1971, Önerme 5.3). Ancak aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi bunun tersi her zaman doğru değildir.

Örnek: $M = \{T_n \in B(\ell_p) : 1 \le p \le \infty, T_n x = x_n e_1\}$, $x = (x_1, ..., x_n, ...)$ ve $e_1 = (1, 0, 0, ...)$ olsun. $M(U_X)$ sınırlı ve 1-boyutlu olduğundan M birlikte kompaktır. Buna karşın, M önkompakt değildir çünkü $m \ne n$ için $\|T_m - T_n\| = 2^{\frac{1}{p}}$ dir.

Birlikte kompakt kümeler ile ilgili geniş bilgi, uygulamaları ile birlikte (Anselone, 1971) de verilmektedir. Ayrıca birlikte kompakt küme kavramı Alpay (1989), Anselone ve Moore (1964), Anselone ve Palmer (1968) ve DePree ve Higgins (1970) çalışmalarında ayrıntılı olarak incelenmektedir. Bu makalede kullanılan kavramlar ve gösterimler ile ilgili Abramovich ve Aliprantis (2002), Anselone (1971), Radjavi ve Rosenthal (2000), Shulman ve Turovskii (2000), Riesz ve Sz.-Nagy (1990) kaynaklarından yararlanılabilir.

$M \subset B(X)$ ailesi için ortak spektral yarıçap (ya da Rota-Strang spektral yarıçapı):

$$\rho(M) = \lim_{n\to\infty} \sup \|M^n\|^{\frac{1}{n}}$$

ve Berger-Wang spektral yarıçapı

$$r(M) = \lim_{n\to\infty} \sup \sup_{T \in M^n} \{\rho(T)\}^{\frac{1}{n}}$$

şeklinde tanımlanır. Bunlar arasında,

$$r(M) \le \sup_{T \in M^n} \{\rho(T)\}^{\frac{1}{n}} \le \rho(M)$$

ilişkisi vardır. Ayrıca herhangi bir $x \in X$ vektörü için yerel ortak spektral yarıçap

$$\rho(M, x) = \lim_{n\to\infty} \sup \|M^n x\|^{\frac{1}{n}}$$

ve bir $T \in B(X)$ operatörü için,

$$\rho(T, x) = \lim_{n\to\infty} \sup \|T^n x\|^{\frac{1}{n}}.$$

ile tanımlanır.

Eğer $\lim_{n\to\infty} \|M^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0$ ise, M ailesine $x \in X$ noktasında yerel yarınilpotent denir. Eğer M ailesinin her sonlu alt ailesi yerel yarınilpotent ise M ye yerel sonlu yarınilpotent denir.

$T \in B(X)$ olsun. $Res(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1}$ var ve sürekli$\} \subset \mathbb{C}$ kümesine T operatörünün ayıracı (resolvent) denir. Ayıraca ait olmayan bütün λ ların kümesine yani $\mathbb{C} - Res(T)$ ye T nin spektrumu adı verilir ve $\sigma(T)$ ile gösterilir. σ, $\sigma(T)$ nin kapalı bir alt kümesi olmak üzere, $\sigma(T) - \sigma$ alt kümesi de kapalı ise σ ya T nin spektral kümesi denir. T nin σ spektral kümesine karşılık gelen spektral izdüşümünü $P_\sigma(T)$ ile gösterelim. Ayrıca $\sigma(T)$ yi içine alan açık bir küme üzerinde tanımlı tüm yerel analitik fonksiyonların kümesini de $\mathbb{F}(T)$ ile gösterelim. X in altuzaylarının içiçe geçmesi ile meydana gelen Γ zincirini gözönüne alalım. Eğer her

$\Theta \subset \Gamma$ için, $\sup\Theta = \overline{\bigcup_{Y\in\Theta} Y}$, $\inf\Theta = \bigcap_{Y\in\Theta} Y$, $\{0\}$ ve X, Γ ya ait ise Γ ya tam zincir denir. Başka hiçbir zincir tarafından kapsanamayan altuzayların zincirine maksimal zincir denir.

Γ, X in kapalı altuzaylarının tam zinciri olmak üzere herhangi bir $Z \in \Gamma$ için, $Z_- = \sup\{Y \in \Gamma : Y \subset Z, Y \neq Z\}$ tanımlansın ve $\{0\}_- = 0$ olsun. Eğer $Z_- \neq Z$ ise, (Z_-, Z) ikilisine Γ nın bir gediği, Z/Z_- bölümüne de Γ nın bir gedik bölümü denir. $T \in alg\Gamma$ ve $Z \in \Gamma$ için $V = Z/Z_-$ olmak üzere, T nin Z ye kısıtlanışını $T|Z$ ile, T nin V üzerine indirgenmiş operatörünü de $T|V$ ile gösterelim. $alg\Gamma$ daki operatör aileleri için de aynı gösterim kullanılmaktadır. Γ üzerinde tanımlı gap_Γ fonksiyonu, her $Z \in \Gamma$ için $gap_\Gamma(Z) = Z/Z_-$ ile tanımlanır.

X in altuzaylarının bir Γ zincirinin maksimal olması için gerek ve yeter koşul Γ nın tam, $\{0\}, X \in \Gamma$ ve herhangi bir $Z \in \Gamma$ için Z/Z_- nin boyutunun en fazla 1 olmasıdır (Radjavi ve Rosenthal, 2000, Teorem 7.1.9).

Operatörlerin bir M ailesi için, herbiri bu aile altında değişmez kalan, X in altuzaylarının bir maksimal zinciri varsa bu aileye üçgenleştirilebilirdir, denir.

Ara sonuçlar

$M \subset B(X)$ ve $T \in B(X)$ olmak üzere, $t \geq 0$ için

$$\varepsilon_t(M) := \{x \in X : \rho(M, x) \leq t\},$$

ve benzer şekilde

$$\varepsilon_t(T) := \{x \in X : \rho(T, x) \leq t\}$$

tanımlansın. Aşağıdaki yardımcı teorem, (Shulman ve Turovskii, 2000) deki yardımcı teoremler 13.1 ve 13.2 den yararlanılarak oluşturulmuştur.

Yardımcı Teorem 1: $M \subset B(X)$ sınırlı olsun. Bu durumda,
a) $\varepsilon_t(M)$, M için hiperdeğişmez altuzaydır.
b) Her $T \in M^k$ ve k>0 için, $\varepsilon_t(M) \subset \varepsilon_{t^k}(T)$ dir.

Tanım: $M \subset B(X)$ birlikte kompakt küme olsun. $lim(M)$, $T_k \in M^{n_k}$ ve $n_k \to \infty$ olacak şekilde birlikte kompakt olan yakınsak $\{T_k\}$ dizilerinin tüm kuvvetli limitlerinin kümesi şeklinde tanımlansın.

Yani, $T \in lim(M)$ olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $T_k x \to Tx$, $T_k \in M^{n_k}$ ve $\{T_k\}$ nın birlikte kompakt olmasıdır. Burada $TU_X \subset \overline{\{T_k x : x \in U_X\}} = \overline{\{T_k\}U_X}$ olduğundan, T nin kompakt operatör olduğu görülür. Başka deyişle, $lim(M)$ kompakt operatörlerden meydana gelmiştir. Bu çalışmada $lim(M)$ sıfırdan farklı kabul edilmiştir.

Yardımcı Teorem 2: $lim(M)$, $SG(M)$ nin bir yarıgrup idealidir.

Kanıt: $T \in lim(M)$ ve $S \in SG(M)$ olsun. $T_k \in M^{n_k}$ ve $x \in X$ için $n_k \to \infty$ iken $T_k x \to Tx$ olsun. Bu durumda, bir j sayısı için $ST_k \in M^{j+n_k}$ ve her $x \in X$ için $ST_k x \to STx$ dir. $S \in SG(M)$ kompakt operatör olduğundan, $\{ST_k\}$ birlikte kompakt dizidir. Diğer taraftan, her $x \in X$ için $T_k x \to Tx$ ve $S \in SG(M)$ ise, S kompakt operatör olduğundan, $n_k \to \infty$ iken $\|(T_k - T)S\| \to 0$ dır. Böylece, her $x \in X$ için $T_k Sx \to TSx$ dir ve $\{T_k S, TS\}_k$ nın kompakt operatörlerden meydana gelen kompakt küme olduğu görülür. Dolayısıyla, $\{T_k S, TS\}_k$ birlikte kompakt kümedir. Bu durumda $\{T_k S\}_k$ birlikte kompaktır. Böylece $lim(M)$, $SG(M)$ nin bir yarıgrup ideali olur.

Aşağıdaki yardımcı teorem, operatör yarıgrupların değişmez altuzaylarının varlığını göstermekte kullanılan yaygın bir yöntemdir. Bunun kanıtı için (Abramovich ve Aliprantis, 2002) de Yardımcı Teorem 10.49 a bakılabilir.

Yardımcı Teorem 3: $\mathbb{S}$, bir Banach uzayı üzerinde tanımlı sürekli operatörlerden oluşan çarpımsal yarıgrup ve $\mathbb{S}_0$, $\mathbb{S}$ nin sıfırdan farklı bir yarıgrup ideali olsun. Eğer $\mathbb{S}_0$ aşikar olmayan kapalı değişmez altuzaya sahip ise, $\mathbb{S}$ de aynı şekilde aşikar olmayan kapalı değişmez altuzaya sahiptir.

Sınırlı bir $M \subset B(X)$ kümesi için $LIM(M)$, $T_k \in M^{n_k}$ ve $n_k \to \infty$ olacak şekilde yakınsak $\{T_k\}$ dizilerinin tüm norm limitlerinin kümesi şeklinde tanımlansın. (Shulman ve Turovskii, 2000) den de görülebileceği gibi $LIM(M)$, $\overline{SG(M)}$ nin kapalı bir yarıgrup idealidir.

Aşağıdaki yardımcı teorem (Shulman ve Turovskii, 2000) de Yardımcı Teorem 6.13 tür.

Yardımcı Teorem 4: $M \subset B(X)$ sınırlı küme olsun. f, $\overline{SG(M)}$ den $\mathbb{R}$ ye, $LIM(M)$ nin her noktasında sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $\lim\sup_{n\to\infty} \sup_{T\in M^n} \{f(T)\}^{\frac{1}{n}} < 1$ ise, her $T \in LIM(M)$ için $f(T) = 0$ dır.

Önerme 1: $M \subset B(X)$ birlikte kompakt küme olsun. Eğer $LIM(M) \neq 0$ ve $r(M) < 1$ ise, M hiperdeğişmez altuzaya sahiptir.

Kanıt: $LIM(M)$, $\overline{SG(M)}$ nin sıfırdan farklı bir yarıgrup idealidir. Yardımcı Teorem 4 te $f(T)$ yerine $\rho(T)$ alınarak ve $\rho(T)$ spektral yarıçapının kompakt operatörler üzerindeki sürekliliği kullanılarak, her $T \in LIM(M)$ için $\rho(T) = 0$ elde edilir. Böylece $LIM(M)$ yarınilpotent kompakt operatörlerden oluşur. $LIM(M)$ kendi başına bir çarpımsal yarıgrup olduğundan, aşikar olmayan hiperdeğişmez altuzaya sahiptir. Bu durumda Yardımcı Teorem 3'ten, $SG(M)$, ve dolayısıyla M ve M' ortak değişmez altuzaya sahip olur.

Aşağıdaki iki yardımcı teorem (Anselone, 1971) de, sırasıyla, Teorem 4.8 ve Teorem 4.15 dir.

Yardımcı Teorem 5: $T_n, T \in B(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $T_n x \to Tx$ ve $\{T_n - T\}$ birlikte kompakt olsun. Bu durumda $\sigma(T) \subset U$ olan her açık U kümesi için $n \geq N$ olduğunda $\sigma(T_n) \subset U$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

Yardımcı Teorem 6: $T_n, T \in B(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $T_n x \to Tx$, $\{T_n - T\}$ birlikte kompakt ve $f \in \mathbb{F}(T)$ olsun. Bu durumda $n \geq N$ olduğunda $f \in \mathbb{F}(T_n)$ ve her $x \in X$ için $f(T_n)x \to f(T)x$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Üstelik, $n \geq N$ için $\{f(T_n) - f(T)\}$ birlikte kompaktır.

Aşağıdaki iki yardımcı teoremin kanıtı (Mısırlıoğlu, 2006) da yer almaktadır.

Yardımcı Teorem 7: $T_n, T \in B(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $T_n x \to Tx$ ve $\{T_n\}$ birlikte kompakt olsun. Eğer U ve V ayrık açık kümeleri için $\sigma(T) \subset U \cup V$ ve $\sigma(T) \cap U \neq \varnothing$ ise, $n \geq N$ olduğunda $\sigma(T_n) \cap U \neq \varnothing$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

Yardımcı Teorem 8: $M \subset B(X)$ birlikte kompakt küme olsun. Eğer $r(M) < 1$ ise, her $T \in lim(M)$ için $\rho(T) = 0$ dır.

Aşağıdaki önerme önceki sonuçlar yardımı ile kanıtlanabilir.

Önerme 2: $M \subset B(X)$ birlikte kompakt küme olsun. Eğer $r(M) < 1$ ise, $SG(M)$ hiperdeğişmez altuzaya sahiptir.

(Shulman ve Turovskii, 2000) de yer alan Sonuç 13.5'e göre, yerel sonlu yarınilpotent $M \subset B(X)$ kümesi, eğer M ve M' tarafından üretilen kapalı altcebri sıfırdan farklı bir kompakt operatör içeriyorsa, aşikar olmayan hiperdeğişmez altuzaya sahiptir. Böylece, $B(X)$ in herhangi bir yerel yarınilpotent birlikte kompakt alt kümesi, daima aşikar olmayan kapalı hiperdeğişmez altuzaya sahiptir.

Önerme 3: $M \subset B(X)$ birlikte kompakt küme olsun. Eğer $\rho(M,x) < \sup_{T \in M^n} \{\rho(T)\}^{\frac{1}{n}}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x \in X$ elemanı varsa, M hiperdeğişmez altuzaya sahiptir.

Kanıt: Önermedeki varsayımdan, öyle bir k doğal sayısı vardır ki $T \in M^k$ için $\rho(M,x) \le \rho(T)^{\frac{1}{k}}$ dır. $\rho(M,x) = t$ diyelim. Bu durumda, $t^k < \rho(T)$ dir ve $\varepsilon_t(M) \subset \varepsilon_{t^k}(T)$ olur. Ayrıca $x \in \varepsilon_t(M)$ olduğundan, $\varepsilon_t(M) \ne 0$ dır. Şimdi $\overline{\varepsilon_{t^k}(T)} \ne X$ olduğunu gösterelim. Sıfır merkezli ve r yarıçaplı herhangi bir çember için $\sigma(T)$ ye ait, bu çember dışında kalan yalnızca sonlu sayıda nokta vardır. Bu r yarıçapının, $t^k < r < \rho(T)$ olacak şekilde uygun bir seçimini yaparak, $\{z : |z| = r\}$ çemberini T nin ayıracı içinde alabiliriz. σ, spektrumun bu çember içinde yer alan parçası olsun. Bu durumda σ bir spektral kümedir. Bu durumda $P_\sigma(T)$ spektral izdüşümünün değer bölgesi, (Abramovich ve Aliprantis, 2002) deki Problem 6.4.14 de olduğu gibi $\{x \in X : \frac{T^n x}{r^n} \to 0\}$ ile ifade edilebildiğinden, $\varepsilon_{t^k}(T)$, $P_\sigma(T)$ nin değer bölgesi içinde yer alır. Kapanışları alınarak,

$$\overline{\varepsilon_{t^k}(T)} \subset \overline{RanP_\sigma(T)} = RanP_\sigma(T)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, $r < \rho(T)$ ve $P_\sigma(T) \ne I$ dir. Dolayısıyla, $\overline{\varepsilon_t(M)} \ne X$ olur ve buradan M nin hiperdeğişmez altuzaya sahip olduğu görülür.

(Shulman ve Turovskii, 2000) de Teorem 13.10, spektrumları sayılabilir olan operatörlerden meydana gelen $SG(M)$ yarıgrubu için $\rho(M,x) < r(M)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x \in X$ elemanı varsa, M nin aşikar olmayan hiperdeğişmez altuzaya sahip olduğunu ifade etmektedir. Aşağıdaki önerme bu teoremin bir sonucudur.

Önerme 4: $M \subset B(X)$ birlikte kompakt küme olsun. Eğer $\rho(M,x) < r(M)$ olacak şekilde sıfırdan faklı bir $x \in X$ elemanı varsa, M aşikar olmayan hiperdeğişmez altuzaya sahiptir.

Aşağıdaki teorem Turovskii (1999) tarafından kanıtlanmıştır.

Teorem: $M \subset B(X)$ kompakt operatörlerin önkompakt kümesi ve $\rho(M) = 1$ olsun. Eğer $SG(M)$ sınırlı değilse, M aşikar olmayan hiperdeğişmez altuzaya sahiptir.

Amacımız bu teoremi birlikte kompakt kümelere genişletmektir. Bunun için şu incelemeyi yapalım: X üzerindeki sınırlı operatörlerden oluşan sınırlı bir M kümesi verildiğinde, eğer $t > \rho(M)$ ise, $SG(t^{-1}M)$ sınırlıdır. Gerçekten, $\rho(t^{-1}M) = t^{-1}\rho(M) < 1$ dir ve dolayısıyla yeterince büyük her $n > 0$ için $\|(t^{-1}M)^n\| < 1$ olur.

Önerme 5: $M \subset B(X)$ birlikte kompakt küme ve $\rho(M) = 1$ olsun. Eğer $SG(M)$ sınırlı değilse, M aşikar olmayan hiperdeğişmez altuzaya sahiptir.

Kanıt: (t_n) gerçel sayıların $t_n \to 1^+$ olacak şekilde bir dizisi olsun. $SG(t_n^{-1}M)$ sınırlı olduğundan, X üzerinde tanımlı φ_n fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\varphi_n(x) = s_n^{-1} \|SG_1(t_n^{-1}M)x\|, \ \forall x \in X,$$

burada $s_n = \|SG_1(t_n^{-1}M)\|$ dir. Tüm φ_n ler X üzerinde normdurlar ve $\| \ \|$ normuna eşdeğerdirler. Ayrıca her $T \in M$ ve her $x \in X$ için $\varphi_n(Tx) \le t_n \varphi_n(x)$ dir.

φ fonksiyonu X üzerinde

$$\varphi(x)=\limsup_{n\to\infty}\varphi_n(x),\ \forall x\in X$$

şeklinde tanımlansın. φ, X üzerinde sıfırdan farklı bir yarınormdur. Ayrıca her $x\in X$ için $\varphi_n(x)\le\|x\|$ olduğundan φ, X üzerinde süreklidir ve böylece $Çek\varphi=\{x\in X:\varphi(x)=0\}$ çekirdeği, X in kapalı bir altuzayıdır. Ayrıca her $x\in X$, $T\in M$ ve $S\in M'$ için

$$\varphi(Tx)=\limsup_{n\to\infty}\varphi_n(Tx)\le\limsup_{n\to\infty}t_n\varphi_n(x)=\varphi(x)$$

ve

$$\varphi(Sx)=\limsup_{n\to\infty}\varphi_n(Sx)\le\|S\|\limsup_{n\to\infty}\varphi_n(x)$$
$$=\|S\|\varphi(x)$$

olduğundan $Çek\varphi$, M altında hiperdeğişmez altuzaydır.

Öncelikle $Çek\varphi\ne X$, yani $\varphi\ne 0$ olduğunu gösterelim. $\varphi_n(x_n)>t_n^{-1}$ ve $\|x_n\|=1$ olacak şekilde $x_n\in X$ dizisi seçelim. $\varphi_n(x_n)$ nin tanımından, $SG_1(t_n^{-1}M)$ nin elemanlarının öyle bir $\{T_n\}$ dizisi vardır ki, her n için

$$s_n^{-1}\|T_nx_n\|>t_n^{-1}$$

olur. $SG(M)$ sınırsız olduğundan, öyle bir $n_0\in\mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $n>n_0$ için $T_n\ne I$ dir. Dolayısıyla her n için $T_n=Q_nS_n$ şeklinde yazılabilir, burada $S_n\in t_n^{-1}M$ ve $Q_n\in SG_1(t_n^{-1})$ dir. M deki $\{t_nS_n\}$ dizisini gözönüne alalım. M birlikte kompakt olduğundan, M deki her dizi yine birlikte kompaktır ve dolayısıyla $\{t_nS_nx_n\}$ dizisi önkompaktır. Böylece bu dizi $\{t_{n_k}S_{n_k}x_{n_k}\}$ şeklinde yakınsak bir altdiziye sahiptir. $t_{n_k}S_{n_k}x_{n_k}\to y\in X$ diyelim. Bu durumda, $\|S_{n_k}x_{n_k}-y\|\to 0$ olur. Her n için

$$\varphi_n(S_nx_n-y)\le\|S_nx_n-y\|$$

ve her n_k için

$$\varphi_{n_k}(y)\ge\varphi_{n_k}(S_{n_k}x_{n_k})-\varphi_{n_k}(S_{n_k}x_{n_k}-y)$$
$$\ge\varphi_{n_k}(S_{n_k}x_{n_k})-\|S_{n_k}x_{n_k}-y\|$$

olduğundan,

$$\varphi(y)=\limsup_{n\to\infty}\varphi_n(y)\ge\limsup_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(S_{n_k}x_{n_k})$$

sağlanır. Diğer taraftan her n için,

$$t_n^{-1}<s_n^{-1}\|Q_nS_nx_n\|\le s_n^{-1}\|SG_1(t_n^{-1}M)S_nx_n\|$$
$$=\varphi_n(S_nx_n)$$

olduğundan, $\varphi(y)\ge 1$ elde edilir. Böylece $Çek\varphi\ne X$ ve $\varphi\ne 0$ bulunur.

Şimdi de $Çek\varphi\ne 0$ olduğunu gösterelim.

$\|T\|\ge\left\|\bigcup_{i=1}^{n-1}M^i\right\|$ ise $T\in M^n$ operatörüne M için öncü denir. $SG(M)$ sınırsız olduğundan, $\{\left\|\bigcup_{i=1}^{n}M^i\right\|\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlı değildir. Dolayısıyla, $\|M^{m_k}\|>\left\|\bigcup_{i=1}^{m_k-1}M^i\right\|$ ve $\left\|\bigcup_{i=1}^{m_k-1}M^i\right\|\to\infty$ olacak şekilde artan bir $\{m_k\}$ dizisi vardır. Böylece, M için öncü olan $T_k\in M^{m_k}$ operatörlerinden oluşan bir $\{T_k\}$ dizisi vardır öyle ki $\|T_k\|\to\infty$ olur. $\alpha_k=\|T_k\|^{-1}$ diyelim. $x_k\in X$ dizisini her k için $\|\alpha_kT_kx_k\|>t_k^{-1}$ olacak şekilde seçelim. $\rho(M)=\lim_{n\to\infty}\|M^n\|^{\frac{1}{n}}=1$ olduğundan, her n için $\|M^n\|=1$ dir. Böylece, α_kT_k operatörlerinin herbirini $P_k(\alpha_kQ_k)$ biçiminde yazabiliriz, burada $P_k\in M$, $\alpha_kQ_k\in SG_1(M)$ ve $\{\alpha_kQ_k\}$ sınırlı bir dizidir. Ayrıca $\{\alpha_kQ_kx_k\}$ dizisi sınırlıdır.

Dolayısıyla, $\{P_k\alpha_k Q_k x_k\} = \{\alpha_k T_k x_k\}$ dizisi, $\{P_k\}$ birlikte kompakt olduğundan yakınsak bir altdiziye sahiptir. $r \to \infty$ iken $P_{k_r}\alpha_{k_r}Q_{k_r}x_{k_r} \to y_0$ olsun. Her r için $\left\|\alpha_{k_r}T_{k_r}x_{k_r}\right\| > t_{k_r}^{-1}$ olduğundan $y_0 \neq 0$ dır. Diğer taraftan, $\varphi(T_{k_r}x_{k_r}) \le \varphi(x_{k_r})$ ve $\varphi(x_{k_r}) \le 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\varphi(y_0) = \lim_{r\to\infty}\varphi(\alpha_{k_r}T_{k_r}x_{k_r}) &\le \limsup_{r\to\infty}\alpha_{k_r}\varphi(x_{k_r})\\ &= \limsup_{r\to\infty}\alpha_{k_r} = 0\end{aligned}$$

olur. Yani, $\varphi(y_0) = 0$ ve böylece $y_0 \in \c{C}ek\varphi$ dir. $y_0 \neq 0$ olduğundan $\c{C}ek\varphi \neq 0$ bulunur.

Berger-Wang formülü

$M \subset B(X)$ için $\rho(M) = r(M)$ ifadesi Berger-Wang Formülü olarak bilinir. Berger ve Wang (1992), sonlu boyutlu doğrusal uzaylar üzerinde tanımlı operatör aileleri için bu formülün sağlandığını göstermişlerdir. Shulman ve Turovskii (2000) ise bu formülün sonsuz boyutlu Banach uzayları üzerinde tanımlı kompakt operatörlerin önkompakt kümeleri ve esaslı skaler operatörlerin önkompakt kümeleri için sağlandığını kanıtlamışlardır. Ancak şu unutulmamalıdır ki Berger-Wang formülü, sınırlı operatörlerin keyfi, hatta 2-elemanlı kümelerine genişletilemez. Bu durum Rosenthal ve Soltysiak (1995) tarafından bir örnekle gösterilmiştir. Bu çalışmada Berger-Wang formülünün, özel bir durumda, birlikte kompakt kümeler için sağlandığı gösterilmektedir.

Aşağıdaki yardımcı teorem, (Shulman ve Turovskii, 2000) de Sonuç 4.3 tür.

Yardımcı Teorem 9: F, X in kapalı altuzaylarının sonlu bir zinciri ve $\{0\}, X \in F$ olsun. Eğer $M \subset B(X)$, $algF$ de sınırlı ise, $\rho(M) = \max\{\rho(M|V) : V \in gap(F)\}$ dir.

Γ, X in kapalı altuzaylarının tam zinciri olsun.

Tanım: $alg_t\Gamma$, tüm $T \in alg\Gamma$ operatörlerinin, Γ daki herhangi bir (Z_-, Z) gediği ve her $z \in Z$ için, $dist(Tz, Z_-) \le t\|z\|$ koşulunu sağlayan kümesi olsun. F, X in kapalı altuzaylarının zinciri olmak üzere, $M \subset alg_t F$ ve $\{0\}, X \in F$ ise, F ye $M \subset B(X)$ için bir t-zinciri denir.

Aşağıdaki yardımcı teorem, (Shulman ve Turovskii, 2000) deki Yardımcı Teorem 4.6 dır.

Yardımcı Teorem 10: $alg_t\Gamma$ daki kompakt operatörlerin herhangi bir sonlu M kümesi, her $\varepsilon > 0$ için sonlu bir $(t+\varepsilon)$-zincirine sahiptir.

Shulman ve Turovskii (2000), $alg_t\Gamma$ da kompakt operatörlerin önkompakt M kümesi için, $\rho(M) \le t$ olduğunu göstermişlerdir. Aşağıdaki önerme bu sonucu, birlikte kompakt kümelere genişletmektedir.

Önerme 6: M, $alg_t\Gamma$ da operatörlerin birlikte kompakt kümesi ise, $\rho(M) \le t$ dir.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ verilsin ve $M_0 \subset M$ sonlu bir küme olsun. Bu durumda $T \in M$ ve $x \in U_X$ için, $\|Tx - T_i y_j\| \le \varepsilon$ olacak şekilde $T_i \in M_0$ $(i = 1, ..., n)$ operatörleri ve y_j $(j = 1, ..., m)$, $\|y_j\| \le 1$, noktaları vardır. M_0, kompakt operatörlerin $alg_t\Gamma$ daki sonlu bir alt kümesidir. Dolayısıyla M_0, Yardımcı Teorem 10 dan sonlu bir $(t+\varepsilon)$-zincirine sahiptir. Bu zincire F diyelim. Bu durumda her $T \in M_0$ ve $Z \in F$ için, $\left\|T|\, gap_F(Z)\right\| < t + \varepsilon$ olur. Şimdi her $T \in M$ için $\left\|T|\, gap_F(Z)\right\| < t + 2\varepsilon$ olduğunu gösterelim.

$T \in M$ ve $\hat{x}$, $V = Z/Z_-$ gediğinin kapalı birim yuvarının keyfi bir elemanı olsun. Bu durumda $\hat{x} = y$ olacak şekilde bir $y \in Z$, $\|y\| \le 1$, vardır. Buradan

$$\begin{aligned}&\left\|T|V\hat{x}\right\| \le \left\|T|V\hat{x} - T_i|V\hat{y}_j\right\| + \left\|T_i|V\hat{y}_j\right\|\\ &\le \left\|Tx - T_i y_j\right\| + \left\|T_i y_j\right\| < t + 2\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir; burada $T_i y_j$, M ailesinin birlikte kompaktlığına göre seçilmiştir. Bu eşitsizlik Z/Z_- deki her $\hat{x}$, $\|\hat{x}\| \le 1$, için doğru olduğundan, her $T \in M$ için, $\|T|V\| < t + 2\varepsilon$ olur. Böylece her $S \in M$ için, $\|S|\,gap(Z)\| < t + 2\varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla, her $Z \in F$ için, $\rho(M|\,gap_F(Z)) < t + 2\varepsilon$ dur. Bununla birlikte Yardımcı Teorem 9 dan, $\rho(M) = \max\{\rho(M|V) : V \in gap(F)\}$ dir ve böylece $\rho(M) < t + 2\varepsilon$ olur. $\varepsilon \to 0$ alınarak, $\rho(M) \le t$ bulunur.

Aşağıdaki sonucun kanıtı, (Shulman ve Turovskii, 2000) deki Sonuç 4.8'in kanıtı ile aynıdır.

Sonuç: $M \subset B(X)$ üçgenleştirilebilir birlikte kompakt küme olsun. Bu durumda, $\rho(M) = \sup\{\rho(T) : T \in M\}$ dir.

Önerme 7: M, $alg\Gamma$ da birlikte kompakt küme ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda Γ zincirinin, $\|M|\,gap(Z)\| > \varepsilon$ olacak şekilde sonlu sayıda (Z_-, Z) gediği vardır.

Kanıt: Varsayalim ki gediklerin oluşturduğu F kümesi sonlu sayıda gedikten oluşmasın. F deki her (Z_-, Z) gediği için $\|Tx + Z_-\| > \varepsilon$ olacak şekilde $T \in M$ ve $x \in U_Z$ alalım.

W, böyle Tx vektörlerinden oluşan küme olsun. Tx ve Sy, W kümesine ait farklı (U_-, U) ve (V_-, V) gediklerine karşılık gelen herhangi iki vektör olsun. Γ zinciri tam olduğundan, $V \subset U_-$ şeklinde alabiliriz. Bu durumda, $Sy \in U_-$ ve $\|Tx - Sy\| \ge \|Tx + U_-\| > \varepsilon$ olur. F sonsuz olduğundan, W önkompakt değildir. Diğer taraftan, $W \subset MU_X$ dir ve böylece W önkompaktır. Bu ise bir çelişkidir.

Aşağıdaki önerme Shulman ve Turovskii (2000) tarafından, $alg\Gamma$ da, kompakt operatörlerin önkompakt kümeleri için kanıtlanmıştır.

Önerme 8: $M \subset B(X)$, $alg\Gamma$ da birlikte kompakt küme olsun. Bu durumda, $\rho(M) = \rho(M|\Gamma) = \max\{\rho(M|\,gapZ) : Z \in \Gamma\}$ dir

Önerme 8 ve aşağıdaki önermenin kanıtları için (Mısırlıoğlu, 2006) ya bakılabilir.

Önerme 9: $M \subset B(X)$, $alg\Gamma$ da birlikte kompakt küme olsun. Bu durumda, $\rho(M) = r(M)$ dir.

Kaynaklar

Abramovich, Y.A. ve Aliprantis, C.D., (2002). *An invitation to operator theory*, American Mathematical Society.

Alpay, Ş., (1989). On collectively compact positive operators, *Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees*, **34**, 9, 779-791.

Anselone, P.M., (1971). *Collectively compact operator approximation theory and applications to integral equations*, Prentice-Hall Inc.

Anselone, P.M. ve Moore, R.H., (1964). Approximate solutions of integral and operator equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **9**, 268-277.

Anselone, P.M. ve Palmer, T.W., (1968). Collectively compact sets of linear operators, *Pacific Journal of Mathematics*, **25**, 417-422.

Anselone, P.M. ve Palmer, T.W., (1968). Spectral analysis of collectively compact strongly convergent operator sequences, *Pacific Journal of Mathematics*, **25**, 423-431.

Berger, M.A. ve Wang, Y., (1992). Bounded semigroups of matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **166**, 21-27.

DePree, J.D. ve Higgins, J.A., (1970). Collectively compact sets of linear operators, *Mathematische Zeitschrift*, **115**, 366-370.

Mısırlıoğlu, T., (2006). Invariant subspace theorems for families of operators on Banach spaces and Banach lattices, *Doktora Tezi*, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Radjavi, H. ve Rosenthal, P., (2000). *Simultaneous triangularization*, Springer-Verlag.

Riesz, F. ve Sz.-Nagy, B., (1990). *Functional Analysis*, translated from the 2nd French edition Leo F. Boron, New York: Dover Publications.

Rosenthal, P. ve Soltysiak, A., (1995). Formulas for the joint spectral radius of non-commuting Banach algebra elements, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **123**, 9, 2705-2708.

Shulman, V.S. ve Turovskii, Yu.V., (2000). Joint spectral radius, operator semigroups, and a problem of W. Wojtynski, *Journal of Functional Analysis,* **177**, 383-441.

Turovskii, Yu.V., (1999). Volterra semigroups have invariant subspaces, *Journal of Functional Analysis*, **162**, 313-322.